

Ejercicios Resueltos Dibujo Técnico 1 de Bachillerato 2026 / 2027

37 ejercicios con la solución explicada paso a paso, y la teoría de los 15 temas que trae esta selección.

Lo que vas a practicar

Trazados fundamentales con regla y compás · mediatriz, bisectriz, perpendiculares, paralelas, división de un segmento y simetría **(solo teoría)**

Proporcionalidad, equivalencia y semejanza en el dibujo · Repartir un segmento en partes proporcionales, hallar una cuarta proporcional y pasar de una forma a otra equivalente **(ejercicios 1, 2, 3, 4)**

La sección áurea y el número de oro · Calcular el número de oro, construir un rectángulo áureo por sus medidas y dividir un segmento en media y extrema razón **(ejercicios 5, 6, 7)**

Escalas numéricas y gráficas: reducción y ampliación · Pasar del dibujo a la realidad y al revés, deducir la escala de dos medidas y distinguir una reducción de una ampliación **(ejercicios 8, 9, 10, 11, 12)**

Formatos normalizados de la serie A · Calcular superficies de formatos, contar cuántos caben unos en otros y comprobar la razón entre sus lados **(ejercicios 13, 14, 15)**

Polígonos regulares: ángulos, apotema y área · Calcular el ángulo central y el interior, deducir el número de lados y hallar apotemas y áreas **(ejercicios 16, 17, 18, 19)**

Construcción de triángulos, cuadriláteros y polígonos regulares · los métodos paso a paso, con las medidas y con lo que hay que comprobar en cada uno **(solo teoría)**

Lugares geométricos y arco capaz · Hallar puntos de una mediatriz por sus coordenadas, calcular el radio del arco capaz y describir lugares geométricos con números **(ejercicios 20, 21, 22)**

Tangencias básicas razonadas por distancias · Localizar el centro de una circunferencia tangente por sus distancias, con coordenadas, y hallar los puntos de tangencia **(ejercicios 23, 24, 25, 26, 27)**

El trazado de tangencias y las curvas técnicas · los dos principios de la tangencia, los enlaces con regla y compás y las curvas técnicas **(solo teoría)**

El punto y la recta en el sistema diédrico, por coordenadas · Decidir el cuadrante a partir del alejamiento y la cota, dar las proyecciones y calcular distancias **(ejercicios 28, 29, 30, 31)**

Perspectivas isométrica y caballera: los coeficientes de reducción · Aplicar el coeficiente de reducción de la isométrica y el del eje de profundidad de la caballera, en los dos sentidos **(ejercicios 32, 33, 34)**

El sistema de planos acotados: cota, pendiente e intervalo · Calcular pendientes e intervalos de una recta, graduarla y combinarlo con la escala del plano **(ejercicios 35, 36, 37)**

El sistema cónico: fundamentos y elementos · por qué lo lejano se dibuja más pequeño, los elementos

del sistema y las perspectivas frontal y oblicua **(solo teoría)**

Vistas normalizadas, líneas normalizadas y acotación · qué vistas se eligen, cómo se colocan, qué dice cada tipo de línea y cómo se acota **(solo teoría)**

Material propio de solucionario.es. Los enunciados y las soluciones están escritos por nosotros. La versión al día, con más ejercicios y de todos los cursos, está siempre en:

solucionario.es

Qué entra aquí y qué no, y por qué esta página es desigual a propósito. Esto cubre **Dibujo Técnico I**, la asignatura de primero de Bachillerato, con los quince temas del cuadro. ▲ **No sustituye a un cuaderno de láminas**, y conviene decirlo claro desde el principio: un archivo de texto no puede llevar dibujos, así que **diez temas traen teoría y ejercicios y cinco traen solo la teoría. Con ejercicios** van los diez temas que se resuelven con números y con razonamiento, sin trazar nada: proporcionalidad, equivalencia y semejanza; la sección áurea y el número de oro; las escalas numéricas y gráficas; los formatos de la serie A; los ángulos, la apotema y el área de los polígonos regulares; los lugares geométricos y el arco capaz; las tangencias básicas razonadas por distancias y coordenadas; el punto y la recta en el sistema diédrico por coordenadas; los coeficientes de reducción de las perspectivas isométrica y caballera; y la cota, la pendiente y el intervalo del sistema de planos acotados. **Solo con la teoría** vienen cinco temas, porque el ejercicio pediría mirar o trazar algo que este archivo no puede llevar: los **trazados fundamentales con regla y compás**; la **construcción de triángulos, cuadriláteros y polígonos regulares**; el **trazado de tangencias y las curvas técnicas**; el **sistema cónico: fundamentos y elementos**; y las **vistas normalizadas, líneas normalizadas y acotación**. En esos cinco la explicación va paso a paso y con las medidas, para que se pueda estudiar y después hacer sobre el papel con regla y compás. Es menos de lo que sería con dibujos, y más que nada. **Queda fuera a propósito** lo que es de **Dibujo Técnico II**, el curso siguiente: la homología y la afinidad, la potencia de un punto con el eje y el centro radical, las curvas cónicas, los abatimientos, los giros y los cambios de plano, la representación de prismas, pirámides, cilindros, conos y poliedros regulares con sus secciones planas, los cortes, secciones y roturas, y la representación de sólidos en perspectiva cónica. También queda fuera el bloque de **sistemas CAD**, que se aprende delante de la pantalla y no en un archivo de texto. Todo lo que hay aquí se hace con lápiz, papel y una calculadora corriente. Sirve para localizar lo que flojea; no sustituye al libro ni a las clases.

Trazados fundamentales con regla y compás

Lo que hay que saber

▪ **Este tema viene solo con la teoría y no trae ejercicios.** Para hacer un trazado hacen falta el papel, la regla y el compás, y un enunciado tendría que mandar mirar o trazar algo que esta página no puede poner. Lo que sí cabe es contarlo paso a paso, y eso es lo que viene aquí.

Mediatriz de un segmento AB. Se abre el compás más de la mitad de AB. Se pincha en A y se traza un arco a cada lado; sin tocar la abertura, se pincha en B y se trazan otros dos. Los arcos se cortan en dos puntos, uno a cada lado del segmento, y la recta que los une es la mediatriz: pasa por el punto medio de AB y es perpendicular a AB.

Bisectriz de un ángulo. Con el compás en el vértice se traza un arco que corta a los dos lados. Desde cada uno de esos dos cortes, con la misma abertura, se trazan dos arcos que se cruzan. Si esa abertura es la misma que se usó desde el vértice, los dos arcos pasan también por el propio vértice: el cruce que sirve es el otro. La recta que va del vértice a ese cruce parte el ángulo en dos iguales.

Perpendicular a una recta, esté P en ella o fuera. Con el compás en P se marcan dos puntos de la recta a la misma distancia, uno a cada lado. La mediatriz del segmento que forman esos dos puntos pasa por P y es la perpendicular buscada. Si P es exterior a la recta, se empieza igual: con el compás en P y una abertura que pase de lo que P dista de ella, se corta la recta en dos puntos distintos, y su mediatriz es la perpendicular.

Paralela a una recta a una distancia d. Se levantan dos perpendiculares en dos puntos cualesquiera de la recta y se lleva d sobre cada una, al mismo lado de la recta en las dos; la recta que une los dos extremos es la paralela. Si se lleva d a un lado en una y al otro lado en la otra, lo que sale corta a la recta de partida y no es paralela a ella. Hay dos paralelas, una a cada lado, porque cuanto punto dista d de una recta forma precisamente ese par.

Dividir un segmento AB en n partes iguales. Desde A se traza una semirrecta auxiliar con cualquier inclinación menos la de AB: si cae sobre AB no hay construcción. Sobre ella se llevan n segmentos iguales con el compás, seguidos y hacia el mismo lado, todos de la misma abertura. Se une el último punto con B y se trazan paralelas a esa última recta por los demás puntos: donde cortan a AB queda dividido en n partes iguales. Es el teorema de Tales puesto a trabajar.

Simetría. Dos puntos son simétricos respecto de una recta, llamada eje, cuando esa recta es la mediatriz del segmento que los une. Para hallar el simétrico de un punto P se traza la perpendicular al eje por P. Sobre ella se lleva, al otro lado del eje, la misma distancia que había. Y son simétricos respecto de un punto, llamado centro, cuando el centro es el punto medio de ese segmento: entonces se traza la recta que une P con el centro y se prolonga más allá de él otro tanto. En el primer caso la forma se refleja; en el segundo, gira media vuelta.

▲ Estos seis trazados son la caja de herramientas del resto del curso: casi todos los demás problemas acaban pidiendo una mediatriz, una bisectriz o una perpendicular. Merece la pena tenerlos por la mano antes de pasar a las tangencias.

Proporcionalidad, equivalencia y semejanza en el dibujo

Lo que hay que saber

Dos magnitudes son **proporcionales** cuando su cociente no cambia por más que crezcan las dos: triplicar una obliga a triplicar la otra. Ese cociente fijo es la **razón**, y aquí es un número sin unidad porque se dividen dos longitudes.

Un haz de paralelas que atraviesa dos rectas secantes deja en cada una segmentos proporcionales: eso es el **teorema de Tales**, y es la herramienta de la que sale media geometría de primero. Con él se obtiene la **cuarta proporcional** —dados tres segmentos, el que cierra la proporción— y se reparte un segmento en trozos iguales o proporcionales a unos números.

Dos formas son **semejantes** cuando una es la copia de la otra a otro tamaño: conservan cada ángulo y multiplican cada lado por el mismo número. Ese número es la **razón de semejanza**.

▪ Las áreas *no* van con la razón de semejanza, sino con su cuadrado: si los lados se multiplican por 3, el área se multiplica por 9. Y los volúmenes, por el cubo. Es el paso que conviene escribir aparte antes de tocar ninguna área.

Dos formas son **equivalentes** cuando tienen la misma área, aunque no se parezcan en nada. Equivalencia y semejanza son cosas distintas: dos cuadrados de distinto tamaño son semejantes y no equivalentes, y un cuadrado y un triángulo de la misma área son equivalentes y no semejantes.

El lado del cuadrado equivalente a un rectángulo de lados a y b es la **media geométrica** de los dos, es decir la raíz cuadrada de $a \cdot b$. Con regla y compás sale de una semicircunferencia levantada sobre los dos segmentos puestos seguidos; con números, de una raíz.

1

Un segmento de **84 mm** se reparte en tres trozos proporcionales a **2, 3 y 7**. ¿Cuánto mide cada trozo?

Solución

Los tres números del reparto suman $2 + 3 + 7 = 12$. Esas doce partes iguales son las que hay que repartir a lo largo de los 84 mm.

Cada parte mide $84 \div 12 = 7$ mm. Es el valor que en el trazado con regla y compás se obtiene llevando doce segmentos iguales sobre una recta auxiliar.

Los tres trozos miden, por tanto, $2 \cdot 7 = 14$ mm, $3 \cdot 7 = 21$ mm y $7 \cdot 7 = 49$ mm.

Para corregirte, suma los tres: $14 + 21 + 49 = 84$ mm, que es el segmento de partida. Y mira además que la razón se conserve: $14 \div 7 = 2$, $21 \div 7 = 3$ y $49 \div 7 = 7$.

2

Dos rectas que se cortan están atravesadas por tres paralelas. Sobre la primera recta quedan determinados dos segmentos de **24 mm** y **36 mm**; sobre la segunda, el primero mide **30 mm**. ¿Cuánto mide el segundo?

Solución

El teorema de Tales dice que esas paralelas dejan segmentos proporcionales sobre las dos rectas, así que 24 es a 36 como 30 es al valor buscado.

Escrito como igualdad de razones: $24 \div 36 = 30 \div x$. La razón entre las dos rectas es $30 \div 24 = 5/4$, es decir, sobre la segunda recta todo sale un cuarto más largo.

Aplicando esa razón al segundo segmento: $36 \cdot 5/4 = 45$ mm.

Para corregirte, multiplica en cruz: $24 \cdot 45 = 1.080$ y $36 \cdot 30 = 1.080$. Si los dos productos no coinciden, alguna de las dos razones está invertida.

3

Dos triángulos son semejantes. El primero tiene lados de **30 mm, 40 mm y 50 mm**. En el segundo, el lado que se corresponde con el de 30 mm mide **42 mm**. Calcula (a) la razón de semejanza, (b) los otros dos lados del segundo y (c) la razón entre las áreas.

Solución

(a) La razón de semejanza es el cociente entre dos lados que se corresponden: $42 \div 30 = \mathbf{7/5}$, o sea 1,4.

(b) Los otros dos lados salen multiplicando por esa razón: $40 \cdot 7/5 = \mathbf{56 \text{ mm}}$ y $50 \cdot 7/5 = \mathbf{70 \text{ mm}}$.

(c) El primer triángulo es rectángulo: 30 al cuadrado más 40 al cuadrado, o sea $900 + 1.600 = 2.500$, da 50 al cuadrado. Su área vale entonces $30 \cdot 40 \div 2 = \mathbf{600 \text{ mm}^2}$, y la del segundo, $42 \cdot 56 \div 2 = \mathbf{1.176 \text{ mm}^2}$.

La razón entre las áreas es $1.176 \div 600 = \mathbf{49/25}$, que es exactamente el cuadrado de 7/5. Las áreas van con el cuadrado de la razón, no con la razón.

Para corregirte, eleva la razón de semejanza al cuadrado antes de mirar las áreas: $(7/5)^2 = 49/25$. Si el cociente de áreas te sale 7/5, has aplicado la razón una sola vez.

4

Un rectángulo mide **90 × 40 mm**. (a) ¿Cuánto mide el lado de un cuadrado equivalente, es decir, de la misma área? (b) ¿Y la altura de un triángulo equivalente cuya base mida **60 mm**?

Solución

El área del rectángulo es $90 \cdot 40 = \mathbf{3.600 \text{ mm}^2}$. «Equivalente» quiere decir que tiene esa misma área, aunque la forma sea otra.

(a) El cuadrado cumple lado al cuadrado igual a 3.600 mm^2 , así que el lado es la raíz cuadrada de 3.600, es decir **60 mm**. Fíjate en que la unidad cambia: se entra con milímetros cuadrados y se sale con milímetros.

Ese 60 es también la media geométrica de 90 y 40, que es la construcción clásica del cuadrado equivalente a un rectángulo: la raíz cuadrada de $90 \cdot 40$.

(b) Un triángulo tiene de área la mitad del producto de su base por su altura. Aquí, $60 \cdot h \div 2 = 3.600 \text{ mm}^2$, de donde $h = 2 \cdot 3.600 \div 60 = \mathbf{120 \text{ mm}}$.

Para corregirte, vuelve a calcular las tres áreas: $90 \cdot 40 = 3.600$; $60 \cdot 60 = 3.600$; $60 \cdot 120 \div 2 = 3.600$. Las tres tienen que dar el mismo número de milímetros cuadrados.

La sección áurea y el número de oro

Lo que hay que saber

Un segmento está dividido en **media y extrema razón** cuando la parte mayor es media proporcional entre el segmento entero y la parte menor: el cuadrado de la mayor es igual al producto del total por la menor. Esa división es la **sección áurea**.

La razón entre el segmento entero y la parte mayor es el **número de oro**, que se escribe φ y vale $(1 + \sqrt{5}) \div 2$. Es un número irracional, así que en los trazados se maneja como raíz y solo se aproxima al final.

φ cumple una propiedad que sirve de control en cualquier cuenta: $\varphi^2 = \varphi + 1$. También, dividiendo esa igualdad entre φ , que $\varphi - 1 = 1 \div \varphi$.

Un **rectángulo áureo** es el que tiene los lados en razón φ . Al quitarle un cuadrado construido sobre el lado menor queda otro rectángulo áureo, y la operación se puede repetir indefinidamente.

▲ Para acotar un valor con raíces sin calculadora, el camino seguro es elevar al cuadrado: para decir entre qué dos decimales está $\sqrt{5}$ se prueba con $2,2360^2$ y $2,2361^2$ y se mira si el 5 queda en medio. Comparar decimales ya redondeados puede hacer parecer iguales dos números distintos.

▲ La sección áurea aparece en muchos análisis de obras de arte y de arquitectura, y parte de esas atribuciones están discutidas por los historiadores. Aquí se usa como construcción geométrica, que es lo que se puede comprobar con números.

- 5** El número de oro es $\varphi = (1 + \sqrt{5}) / 2$. (a) Desarrolla φ^2 y $\varphi + 1$ por separado y comprueba que las dos expresiones dan el mismo valor exacto, $(3 + \sqrt{5}) / 2$. (b) ¿Entre qué dos números con cuatro cifras decimales está φ ?

Solución

(a) Se eleva al cuadrado la expresión: $\varphi^2 = (1 + \sqrt{5})^2 \div 4 = (1 + 2\sqrt{5} + 5) \div 4 = (6 + 2\sqrt{5}) \div 4 = (3 + \sqrt{5}) / 2$.

Por otro lado, $\varphi + 1 = (1 + \sqrt{5}) \div 2 + 1 = (1 + \sqrt{5} + 2) \div 2 = (3 + \sqrt{5}) / 2$. Las dos expresiones son la misma, así que la igualdad se cumple exactamente, sin aproximar nada.

(b) $\sqrt{5}$ está entre 2,2360 y 2,2361, porque $2,2360^2 = 4,999696$ se queda por debajo de 5 y $2,2361^2 = 5,00014321$ se pasa. Así que φ está entre $(1 + 2,2360) \div 2$ y $(1 + 2,2361) \div 2$, y esas dos cuentas caben de sobra entre **1,6180** y **1,6181**.

Para corregirte, usa la propia igualdad del apartado (a) como control: φ^2 y $\varphi + 1$ valen lo mismo, así que al elevar al cuadrado el valor copiado tiene que salir ese mismo valor con una unidad más. Ojo con los decimales: $1,618^2$ da 2,617924, que es 2,618 redondeando a tres decimales, no exactamente. La igualdad es exacta con φ ; con un φ aproximado el control vale hasta donde llegue la aproximación.

- 6** Un rectángulo áureo tiene el lado menor de **60 mm**. (a) ¿Cuánto mide el lado mayor? (b) Si le quitas un cuadrado de 60 mm de lado, ¿cuánto miden los lados del rectángulo que queda, y qué razón hay entre ellos?

Solución

(a) En un rectángulo áureo el lado mayor es el menor multiplicado por φ : $60 \cdot (1 + \sqrt{5}) \div 2 = 30 \cdot (1 + \sqrt{5}) = 30 + 30\sqrt{5}$ mm.

$30\sqrt{5}$ está entre 67,08 y 67,09. Sus cuadrados son 4.499,7264 y 4.501,0681, y dejan en medio a $30^2 \cdot 5 = 4.500$. El lado mayor mide, por tanto, entre **97,08** y **97,09 mm**.

(b) Al quitar el cuadrado de 60 mm queda un rectángulo de 60 mm por $30 + 30\sqrt{5} - 60 = 30\sqrt{5} - 30$ mm, que está entre 37,08 y 37,09 mm.

Ese rectángulo **también es áureo**: $60 \div (30\sqrt{5} - 30) = 2 \div (\sqrt{5} - 1)$, y al racionalizar con el factor $\sqrt{5} +$

1 queda $2(\sqrt{5} + 1) \div 4 = (\sqrt{5} + 1) \div 2$, que es ϕ otra vez. Es la propiedad que permite encadenar rectángulos áureos uno dentro de otro.

Para corregirte, deshaz el apartado (a): divide el lado mayor entre el menor y tiene que salir ϕ . Con los valores acotados, $97,08 \div 60 = 1,618$.

7

Un segmento de **100 mm** queda dividido en media y extrema razón. ¿Cuánto mide la parte mayor, sabiendo que su cuadrado ha de ser igual al producto del segmento entero por la parte menor?

Solución

Si la parte mayor mide x , la menor mide $100 - x$, y la condición del enunciado se escribe $x^2 = 100 \cdot (100 - x)$, es decir $x^2 + 100x - 10.000 = 0$.

El discriminante vale $100^2 + 4 \cdot 10.000 = 10.000 + 40.000 = 50.000$, cuya raíz cuadrada es $100\sqrt{5}$. Como la medida tiene que ser positiva, se toma el signo más: $x = (-100 + 100\sqrt{5}) \div 2 = 50\sqrt{5} - 50$ mm.

$50\sqrt{5}$ está entre 111,80 y 111,81. Se ve elevando al cuadrado: 12.499,24 y 12.501,4761 dejan en medio a $50^2 \cdot 5 = 12.500$. Así que la parte mayor mide entre **61,80 y 61,81 mm**, y la menor, entre **38,19 y 38,20 mm**.

Para corregirte, vuelve a la condición de partida con las expresiones exactas: $x^2 = (50\sqrt{5} - 50)^2 = 15.000 - 5.000\sqrt{5}$, y $100 \cdot (100 - x) = 100 \cdot (150 - 50\sqrt{5}) = 15.000 - 5.000\sqrt{5}$. Las dos coinciden.

Escalas numéricas y gráficas: reducción y ampliación

Lo que hay que saber

Una **escala** es la razón entre la medida del dibujo y la medida real, escrita en ese orden. En 1:50, el 1 es el dibujo y el 50 es la realidad; en 50:1, al revés. Es un número sin unidad, porque se dividen dos longitudes; por eso conviene llevarlas a milímetros antes de hacer el cociente.

Si la razón no llega a la unidad, la escala **reduce** (1:2, 1:100, 1:1000). Si pasa de la unidad, **amplía** (2:1, 50:1). Y 1:1 es el tamaño natural.

De la realidad al dibujo se *multiplica* por la escala; del dibujo a la realidad se *divide* entre ella. Con 1:20 eso significa dividir entre 20 en un sentido y multiplicar por 20 en el otro.

▪ Confundir 1:100 con 100:1 da un resultado *plausible*, y ese es el peligro: las cifras son las mismas y lo que cambia es el sentido. El control que sí funciona es preguntarse antes de calcular si el resultado debe salir mayor o menor que el dato, y comprobarlo después.

Las **escalas normalizadas** de la norma UNE-EN ISO 5455 son, para reducir, 1:2, 1:5, 1:10, 1:20, 1:50, 1:100 y sus múltiplos por diez; y para ampliar, 2:1, 5:1, 10:1, 20:1 y 50:1. Elegir una de la lista evita escalas raras que nadie sabe leer.

Una **escala gráfica** es una regla dibujada en el propio plano, dividida en trozos que valen cantidades redondas de la realidad. Su ventaja es que sigue siendo válida si el plano se amplía o se reduce al copiarlo, cosa que no le pasa a la escala numérica escrita.

8

Una pieza mide **350 mm** de largo. (a) ¿Qué longitud tiene en un dibujo a escala **1:5**? (b) ¿Y a escala **5:1**? (c) Di en cada caso si la escala reduce o amplía.

Solución

Una escala es la razón entre la medida del dibujo y la medida real, y se lee en ese orden: el primer número es el dibujo y el segundo, la realidad.

(a) A escala 1:5 la medida del dibujo es la real dividida entre 5: $350 \div 5 = 70$ mm.

(b) A escala 5:1 la medida del dibujo es la real multiplicada por 5: $350 \cdot 5 = 1.750$ mm, que son 1,75

m.

(c) La razón 1:5 vale $1/5$, que es menor que 1, así que **reduce**. La razón 5:1 vale 5, que es mayor que 1, así que **amplía**. Ese es el control que conviene hacer antes de multiplicar: mirar si la razón pasa de la unidad o no llega.

▪ Lo que *no* sirve de comprobación es «si la escala está mal, no cabe en el papel». Con esta pieza se nota, porque 1.750 mm no caben en un A4; pero con una pieza de 12 mm salen 60 mm a 5:1 y 2,4 mm a 1:5, y las dos caben de sobra. El resultado equivocado suele ser perfectamente creíble.

9

En un plano a escala **1:50**, una pared mide **84 mm**. ¿Cuánto mide de verdad, en metros?

Solución

Para ir del dibujo a la realidad se hace lo contrario que para ir de la realidad al dibujo: se divide entre la razón $1/50$, o lo que es lo mismo, se multiplica por 50.

$$84 \cdot 50 = \mathbf{4.200 \text{ mm.}}$$

Como 1 m son 1.000 mm, eso son $4.200 \div 1.000 = \mathbf{4,20 \text{ m.}}$

Para corregirte, deshaz la cuenta: $4.200 \text{ mm} \div 50 = 84 \text{ mm}$, que es lo que medía en el plano. Y comprueba el sentido: 1:50 reduce, así que la medida real tiene que salir *mayor* que la del plano. Si te hubiera salido menor, habrías multiplicado donde tocaba dividir.

10

Una escala gráfica de **1:250** se construye con una longitud total de **100 mm** repartida en **cinco** partes iguales. ¿Cuántos metros reales representa cada parte, y cuántos el conjunto?

Solución

Una escala gráfica es una regla dibujada: cada trozo suyo vale una cantidad redonda de la realidad, y por eso sigue valiendo aunque el plano se fotocopie más grande o más pequeño.

Cada parte mide $100 \div 5 = \mathbf{20 \text{ mm}}$ en el papel.

A escala 1:250, esos 20 mm del papel son $20 \cdot 250 = 5.000 \text{ mm}$ reales, es decir **5 m** por parte.

El conjunto vale cinco veces eso: $5 \cdot 5 = \mathbf{25 \text{ m.}}$ Se llega al mismo número por el otro camino, $100 \cdot 250 = 25.000 \text{ mm} = 25 \text{ m}$, y eso es lo que la confirma.

Para corregirte, comprueba que la cuenta va en el sentido correcto: 1:250 reduce, así que cada milímetro del papel tiene que valer *más* de un milímetro real, y aquí vale 250.

11

Un componente mide **3,5 mm**. (a) ¿Qué longitud tiene dibujado a escala **20:1**? (b) Si el dibujo no debe pasar de **50 mm**, ¿cuál es la mayor escala de ampliación normalizada que se puede usar? Las normalizadas son 2:1, 5:1, 10:1, 20:1 y 50:1.

Solución

(a) A escala 20:1 se multiplica por 20: $3,5 \cdot 20 = \mathbf{70 \text{ mm}}$. Es una ampliación, porque la razón vale 20 y pasa de la unidad.

(b) La condición es que la medida del dibujo no pase de 50 mm: $3,5 \cdot E \leq 50$. De ahí $E \leq 50 \div 3,5 = 100/7$, que está entre 14 y 15.

De la lista de escalas normalizadas, la mayor que no pasa de ese tope es **10:1**, porque la siguiente, 20:1, ya da 70 mm.

Con 10:1 el dibujo mide $3,5 \cdot 10 = \mathbf{35 \text{ mm}}$, que cumple el límite.

Para corregirte, prueba las dos escalas vecinas de la lista: la elegida tiene que cumplir el tope y la siguiente, pasarse. Aquí 10:1 da 35 mm y 20:1 da 70 mm, así que la frontera está bien puesta.

12

Una pieza mide **1,25 m** en la realidad y **25 mm** en el dibujo. (a) ¿Qué escala se ha usado? (b) ¿Qué medida habría salido si por error se hubiera tomado la escala del revés?

Solución

(a) Lo primero es llevar las dos longitudes a milímetros, porque una escala es un cociente entre medidas de la misma clase y no arrastra ninguna unidad: 1,25 m son 1.250 mm.

La escala es la medida del dibujo dividida entre la real: $25 \div 1.250 = 1/50$, es decir **1:50**. Como la razón no llega a la unidad, es una **reducción**.

(b) Tomarla del revés significa leer 50:1, que multiplica por 50: $1.250 \cdot 50 = 62.500$ mm, o sea **62,5 m** de dibujo.

▲ Los dos casos se escriben con las mismas cifras, y por eso mirar la escala no delata el error: lo que cambia es el *sentido*. Aquí salta a la vista porque 62,5 m de papel son absurdos, pero con piezas pequeñas los dos resultados son creíbles.

Para corregirte, vuelve del resultado al dato: $1.250 \text{ mm} \cdot 1/50 = 25 \text{ mm}$, que es lo que medía en el dibujo.

Formatos normalizados de la serie A

Lo que hay que saber

La **serie A** de la norma ISO 216 arranca en el A0, cuya superficie es un metro cuadrado. Cada formato siguiente sale de partir el anterior por la mitad del lado mayor: A1, A2, A3, A4, A5.

Los lados se eligen en razón $\sqrt{2}$ precisamente para que al partir por la mitad la razón se conserve y el formato nuevo sea de la misma familia. Esa es la propiedad que define la serie.

▪ Esa razón es exacta sobre el papel de la norma, no en las medidas que se fabrican: los lados se redondean a milímetros enteros en cada corte, y el redondeo se va acumulando. Antes de dar por buena cualquier igualdad entre formatos, hay que comprobarla con los números.

Cada escalón *duplica* el número de hojas: en un A3 caben dos A4 y cuatro A5. Para contar cuántas hojas pequeñas caben en una grande basta con contar escalones y multiplicar por dos tantas veces.

La norma manda doblar los planos hasta el tamaño A4, dejando fuera el cajetín para que se lea sin desdoblar el plano. El **cajetín** es el recuadro de datos y va en la esquina inferior derecha.

▲ Para comparar un cociente de longitudes con $\sqrt{2}$ no sirve mirar los cuatro primeros decimales: dos números que se separan en la quinta cifra los tienen iguales. Lo que sí decide es comparar los cuadrados, que son números enteros.

13

Un A4 mide **210 × 297 mm**. (a) ¿Qué superficie tiene, en cm²? (b) ¿Cuántos A4 caben en un A0? (c) El A0 mide **841 × 1.189 mm**: ¿cuadra con el apartado anterior?

Solución

(a) La superficie es $210 \cdot 297 = \mathbf{62.370 \text{ mm}^2}$. Como 1 cm² son 100 mm², eso son $62.370 \div 100 = \mathbf{623,70 \text{ cm}^2}$.

(b) Cada corte por la mitad del lado mayor pasa de un formato al siguiente: A0 a A1, A1 a A2, A2 a A3 y A3 a A4. Son **cuatro** cortes, y cada uno duplica el número de hojas: $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = \mathbf{16 \text{ A4}}$ en un A0.

(c) Dieciséis A4 suman $16 \cdot 62.370 = \mathbf{997.920 \text{ mm}^2}$, mientras que el A0 mide $841 \cdot 1.189 = \mathbf{999.949 \text{ mm}^2}$. Las dos cifras se parecen pero no coinciden, y ninguna de las dos es exactamente 1 m², que son 1.000.000 mm².

▪ Así que «partir un formato por la mitad da otro de la serie exactamente» es falso en las medidas reales: los lados se redondean a milímetros enteros en cada corte y la diferencia se va acumulando. El metro cuadrado del A0 es el valor de partida de la norma, no el resultado de multiplicar sus lados

redondeados.

14

La serie A está construida para que la razón entre el lado mayor y el menor sea $\sqrt{2}$. Comprueba con las medidas reales del A4 (**210 × 297 mm**) si eso se cumple exactamente.

Solución

La razón real es $297 \div 210$. Simplificando entre 3, queda **99/70**.

Para compararla con $\sqrt{2}$ se elevan las dos al cuadrado, que es exacto y evita calcular raíces: $(99/70)^2 = 9.801 / 4.900$, mientras que $2 = 9.800 / 4.900$.

Como 9.801 es mayor que 9.800, la razón del A4 es **algo mayor que $\sqrt{2}$** . No coinciden.

Con cinco cifras decimales se ve dónde se separan: $\sqrt{2}$ está entre 1,41421 y 1,41422, y 99/70 está entre **1,41428 y 1,41429**. La diferencia aparece en la quinta cifra.

Para corregirte, no te quedes en los cuatro primeros decimales: los dos números empiezan por 1,4142 y parecería que son iguales. Redondeados a cuatro decimales ni siquiera coinciden — $\sqrt{2}$ da 1,4142 y 99/70 da 1,4143—, pero esa es una diferencia demasiado fina para fiarse de ella. La comparación segura es la de los cuadrados, que son números enteros sobre el mismo denominador.

15

Un formato mide **420 × 594 mm**. (a) ¿Qué formato de la serie A es? (b) ¿Cuántos A4 caben en él?

Solución

(a) Un A4 mide 210 × 297 mm. Duplicando el lado menor se pasa al formato anterior: $210 \cdot 2 = 420$ mm, y el otro lado se queda igual, 297 mm. Eso es un A3 de 297 × 420 mm.

Repitiendo la operación: $297 \cdot 2 = 594$ mm, y queda 420 × 594 mm. Se ha subido dos escalones desde el A4, así que es un **A2**.

(b) Dos escalones significan dos duplicaciones, es decir $2 \cdot 2 = 4$ **A4**.

Para corregirte, compara las superficies: $420 \cdot 594 = 249.480 \text{ mm}^2$, y $249.480 \div 62.370 = 4$ exacto. Aquí sí sale un número redondo porque los lados del A2 y del A4 se corresponden dos a dos sin redondeos por medio.

Polígonos regulares: ángulos, apotema y área

Lo que hay que saber

En un polígono regular de n lados, el **ángulo central** es el que forman dos radios seguidos. Vale $360^\circ \div n$, porque los n ángulos centrales completan la vuelta.

El **ángulo interior** es el que forman dos lados seguidos, y vale $180^\circ - 360^\circ \div n$: es el suplementario del central. La suma de todos los interiores vale $(n - 2) \cdot 180^\circ$, y sirve de control.

La **apotema** va del centro al punto medio de un lado, así que es también el radio de la circunferencia inscrita. El **radio** llega del centro hasta un vértice, o sea es el de la circunferencia circunscrita. Son dos medidas distintas, y usar una donde va la otra estropea la cuenta sin que el resultado parezca raro.

El **área** de cualquier polígono regular es el perímetro por la apotema dividido entre dos. Es la suma de los n triángulos que van del centro a cada lado.

En el hexágono regular el lado coincide con el radio de la circunferencia circunscrita, y la apotema es la altura de un triángulo equilátero: lado por $\sqrt{3}$ dividido entre 2. En el cuadrado inscrito, la diagonal es el diámetro y vale el lado por $\sqrt{2}$.

▲ Lo que depende solo de n es la *suma* de los ángulos interiores; que todos salgan iguales no obliga a que los lados lo sean, como enseña el rectángulo. Comprobar los ángulos es una pista que avisa de haberse equivocado de número de lados, no una prueba de que el trazado esté bien hecho.

- 16** Calcula el ángulo central y el ángulo interior (a) de un pentágono regular y (b) de un octógono regular.

Solución

El ángulo central es el que se ve desde el centro entre dos vértices seguidos, y como los n ángulos centrales completan una vuelta, vale $360^\circ \div n$.

El interior y el central son suplementarios. La razón: el triángulo que forma el centro con un lado tiene los otros dos ángulos iguales a la mitad del interior. De ahí que el interior valga $180^\circ - 360^\circ \div n$.

(a) Pentágono: central $360 \div 5 = 72^\circ$, interior $180 - 72 = 108^\circ$.

(b) Octógono: central $360 \div 8 = 45^\circ$, interior $180 - 45 = 135^\circ$.

Para corregirte, usa la suma de los ángulos interiores, que vale $(n - 2) \cdot 180^\circ$: en el pentágono, $5 \cdot 108 = 540$ y $(5 - 2) \cdot 180 = 540$; en el octógono, $8 \cdot 135 = 1.080$ y $(8 - 2) \cdot 180 = 1.080$.

- 17** ¿Cuántos lados tiene el polígono regular cuyo ángulo interior mide 150° ?

Solución

El ángulo central es el suplementario del interior: $180 - 150 = 30^\circ$.

Como los ángulos centrales completan la vuelta, el número de lados es $360 \div 30 = 12$. Es un dodecágono regular.

Para corregirte, deshaz el camino con la suma de los interiores: $(12 - 2) \cdot 180 = 1.800$, y $1.800 \div 12 = 150^\circ$, que es el dato de partida.

▲ Este control comprueba el *número de lados*, no que un polígono dibujado sea regular. Lo que depende solo de cuántos lados hay es la *suma* de los interiores. Y hay polígonos con todos los ángulos iguales y los lados desiguales: el rectángulo es el caso más conocido. Así que los ángulos pueden cuadrar sin que el polígono sea regular.

18

Un hexágono regular tiene **40 mm** de lado. Calcula (a) su apotema y (b) su área, y di entre qué dos valores enteros de milímetros cuadrados queda esta última.

Solución

(a) El hexágono regular se parte desde el centro en seis triángulos equiláteros de 40 mm de lado. La apotema es la altura de uno de esos triángulos, que vale el lado por $\sqrt{3}$ dividido entre 2: $40 \cdot \sqrt{3} \div 2 = 20\sqrt{3} \text{ mm}$.

El cuadrado de $20\sqrt{3}$ vale 1.200. Y $34,64^2 = 1.199,9296$ se queda corto, mientras que $34,65^2 = 1.200,6225$ se pasa. La apotema está entre **34,64 y 34,65 mm**.

(b) El área de un polígono regular es el perímetro por la apotema dividido entre dos. El perímetro vale $6 \cdot 40 = 240 \text{ mm}$, así que el área es $240 \cdot 20\sqrt{3} \div 2 = 2.400\sqrt{3} \text{ mm}^2$.

Su cuadrado vale 17.280.000. Y $4.156^2 = 17.272.336$ se queda corto, mientras que $4.157^2 = 17.280.649$ se pasa. El área está entre **4.156 y 4.157 mm²**, o sea entre 41,56 y 41,57 cm².

Para corregirte, calcula el área por el otro camino: son seis triángulos equiláteros, y cada uno mide $40^2 \cdot \sqrt{3} \div 4 = 400\sqrt{3} \text{ mm}^2$, así que $6 \cdot 400\sqrt{3} = 2.400\sqrt{3} \text{ mm}^2$. Los dos caminos coinciden.

19

Un cuadrado está inscrito en una circunferencia de **60 mm** de diámetro. Calcula (a) el lado del cuadrado, (b) su área y (c) qué parte del círculo ocupa.

Solución

(a) La diagonal del cuadrado inscrito es el diámetro, 60 mm. En un cuadrado la diagonal vale el lado por $\sqrt{2}$, así que el lado es $60 \div \sqrt{2} = 30\sqrt{2} \text{ mm}$. Como su cuadrado vale 1.800 y $42,42^2 = 1.799,4564$ mientras que $42,43^2 = 1.800,3049$, el lado está entre 42,42 y 42,43 mm.

(b) Elevando el lado al cuadrado sale el área: **1.800 mm²**, o sea 18 cm². Sale exacta aunque el lado no lo sea, y ese es el motivo de elevar al cuadrado el valor exacto en lugar del redondeado.

(c) El radio mide 30 mm, así que el círculo tiene un área de $\pi \cdot 30^2 = 900\pi \text{ mm}^2$. Tomando π entre 3,1415 y 3,1416, eso está entre 2.827,35 y 2.827,44 mm².

La parte que ocupa el cuadrado es $1.800 \div (900\pi) = 2/\pi$, que está entre **0,6366 y 0,6367**, o sea algo más del 63 % del círculo.

Para corregirte, mira que la fracción tenga sentido: el cuadrado está dentro del círculo, así que la fracción ha de quedar entre 0 y 1, y bastante por encima de la mitad, porque solo se quedan fuera cuatro segmentos circulares.

Construcción de triángulos, cuadriláteros y polígonos regulares

Lo que hay que saber

▪ **Este tema viene solo con la teoría y no trae ejercicios.** Construir un polígono es dibujarlo, y aquí no hay papel donde hacerlo. Lo que sí se puede es describir cada método con sus medidas, que es lo que sigue. Los cálculos de ángulos, apotemas y áreas, que sí se pueden practicar, están en su propio tema.

Triángulo del que se conocen los tres lados a, b y c. Se lleva el lado a sobre una recta. Con el compás en un extremo y abertura b se traza un arco; con el compás en el otro extremo y abertura c, otro. El cruce de los dos arcos es el tercer vértice, y se une con los dos extremos de a para cerrar el triángulo. Solo hay solución si cada lado es menor que la suma de los otros dos.

Triángulo equilátero de lado l. Se lleva l y, con el compás abierto a l pinchando en cada extremo, se cruzan dos arcos. Sus tres ángulos miden 60° , así que sirve además para construir un ángulo de 60° sin transportador.

Cuadrado de lado l. Se lleva l, se levanta una perpendicular en uno de los extremos y se lleva l sobre ella; desde los dos puntos obtenidos se cruzan dos arcos de radio l para cerrar el cuarto vértice. Su diagonal mide l por $\sqrt{2}$.

Hexágono regular inscrito en una circunferencia de radio r. El lado vale exactamente r, así que se lleva r seis veces seguidas sobre la circunferencia sin cambiar la abertura del compás; uniendo los seis puntos seguidos queda el hexágono, y uniendo los alternos sale el triángulo equilátero inscrito.

Cuadrado inscrito. Se trazan dos diámetros perpendiculares y se unen sus cuatro extremos. De ahí, bisecando los ángulos centrales, salen el octógono y el resto de la familia que se obtiene duplicando lados.

Pentágono regular inscrito. Se traza un diámetro y el radio perpendicular a él. Se halla el punto medio de uno de los dos semidiámetros del diámetro; con el compás pinchando ahí y abertura hasta el extremo del radio perpendicular, se corta el diámetro. La distancia de ese corte al extremo del radio perpendicular es el lado del pentágono: se lleva esa abertura cinco veces seguidas sobre la circunferencia y se unen los cinco puntos.

Método general para n lados. Se divide un diámetro AB en n partes iguales y se trazan dos arcos de radio igual a ese diámetro, uno con centro en A y otro con centro en B; se cortan en un punto E, fuera de la circunferencia. Se une E con la segunda división contando desde A y se prolonga esa recta hasta cortar la circunferencia en un punto C, que queda al otro lado del diámetro que E. El segmento AC es el lado del polígono: se lleva n veces seguidas sobre la circunferencia y se unen los puntos. ▲ Es un método *aproximado* salvo para unos pocos valores de n, y conviene saberlo: para el hexágono, el cuadrado o el triángulo hay construcciones exactas y son las que se usan.

Lugares geométricos y arco capaz

Lo que hay que saber

Un **lugar geométrico** reúne todo punto que cumple una condición dada, y solo esos. Trabajar con lugares consiste en traducir cada condición del enunciado al suyo y quedarse con lo que aparece en todos a la vez.

Los cuatro que aparecen una y otra vez en este curso: la **mediatriz**, con la misma distancia a dos puntos dados; la **bisectriz**, con la misma distancia a dos rectas; la **circunferencia**, a distancia fija de un centro; y la pareja de **paralelas** a una recta separadas de ella una distancia dada. Cuidado con la bisectriz: si las dos rectas se cortan hay *dos*, perpendiculares entre sí, una por cada pareja de ángulos opuestos. Quedarse con la primera pierde la mitad de las soluciones.

El **arco capaz** de un ángulo α sobre un segmento AB agrupa cuanto punto ve ese segmento bajo ese mismo ángulo. Son dos arcos simétricos respecto de AB. Su radio vale $R = AB \div (2 \cdot \sin \alpha)$.

El caso del ángulo recto es el más usado de todos, y de él salen las tangentes desde un punto exterior y la media geométrica de dos segmentos. Merece la pena sacar su radio con la fórmula y ver qué circunferencia resulta.

▲ Dos condiciones dan dos lugares, y dos lugares pueden cortarse en *varios* puntos: por eso es corriente que haya más de una solución. Antes de quedarse con una conviene contar cuántas hay y decir cuáles son, porque el enunciado puede no descartar ninguna.

▲ El seno crece entre 0° y 90° , y en la fórmula del radio ocupa el denominador. Conviene mirar el resultado con eso en la cabeza para no dar por bueno un radio que va en el sentido contrario del ángulo.

20

El lugar geométrico formado por cuantos puntos equidistan de A(0, 0) y B(80, 60) es la mediatriz de AB, con las medidas en milímetros. ¿En qué punto corta esa mediatriz al eje horizontal?

Solución

Un punto (x, y) equidista de A y de B cuando sus dos distancias coinciden. Igualando los cuadrados, que es lo mismo y evita las raíces: $x^2 + y^2 = (x - 80)^2 + (y - 60)^2$.

Desarrollando el lado derecho: $x^2 - 160x + 6.400 + y^2 - 120y + 3.600$. Los términos x^2 e y^2 se van de los dos lados y queda $0 = -160x - 120y + 10.000$, es decir **$4x + 3y = 250$** .

Todo punto del eje horizontal tiene la segunda coordenada nula, de modo que $4x = 250$ y $x = \mathbf{62,5 \text{ mm}}$. El punto es (62,5; 0).

Para corregirte, mide las dos distancias desde ese punto. Hasta A hay 62,5 mm. Hasta B hay la raíz de $(80 - 62,5)^2 + 60^2$, es decir la raíz de $306,25 + 3.600 = 3.906,25$, que también son 62,5 mm. Coinciden.

Otro control que cuesta poco: el punto medio de AB es (40, 30), y tiene que cumplir la ecuación de la mediatriz, porque la mediatriz pasa por él. En efecto, $4 \cdot 40 + 3 \cdot 30 = 250$.

21

El arco capaz de un ángulo α sobre un segmento AB reúne cuantos puntos hay desde los que AB se ve bajo ese ángulo, y su radio vale $R = AB \div (2 \cdot \sin \alpha)$. Con $AB = \mathbf{60 \text{ mm}}$, calcula R (a) para $\alpha = 30^\circ$, (b) para $\alpha = 60^\circ$ y (c) para $\alpha = 90^\circ$.

Solución

(a) Con $\alpha = 30^\circ$, $\sin 30^\circ = 1/2$, así que $R = 60 \div (2 \cdot 1/2) = 60 \div 1 = \mathbf{60 \text{ mm}}$.

(b) Con $\alpha = 60^\circ$, $\sin 60^\circ = \sqrt{3} \div 2$, así que $R = 60 \div \sqrt{3} = \mathbf{20\sqrt{3} \text{ mm}}$. Su cuadrado vale 1.200, y como $34,64^2 = 1.199,9296$ y $34,65^2 = 1.200,6225$, el radio está entre 34,64 y 34,65 mm.

(c) Con $\alpha = 90^\circ$, $\sin 90^\circ = 1$, así que $R = 60 \div 2 = \mathbf{30 \text{ mm}}$: el arco capaz de 90° es la circunferencia que tiene AB por diámetro, y su centro es el punto medio de AB.

▪ Fíjate en que **a más ángulo, menos radio**, que es lo contrario de lo que suena: 30° da 60 mm, 60°

da unos 34,6 mm y 90° da 30 mm. El seno está en el denominador, y entre 0° y 90° crece.

Para corregirte en el apartado (b), calcula además a qué distancia del punto medio de AB queda el centro: la raíz de $R^2 - 30^2$, es decir la raíz de $1.200 - 900 = 300$, o sea $10\sqrt{3}$ mm, entre 17,32 y 17,33 mm. Con $\alpha = 90^\circ$ esa distancia sale 0, como debe.

22

¿Cuántos puntos están a la vez a **40 mm** de $O(0, 0)$ y a **30 mm** de $P(50, 0)$? Hállalos. Medidas en milímetros.

Solución

Cada condición es un lugar geométrico, y los dos son circunferencias: una de 40 mm de radio con centro en O y otra de 30 mm con centro en P. Los puntos buscados están en las dos.

Antes de calcular conviene ver cuántos habrá. Dos circunferencias se cortan en dos puntos cuando la distancia entre centros queda entre la diferencia y la suma de los radios. Aquí la distancia es 50 mm, la diferencia $40 - 30 = 10$ mm y la suma $40 + 30 = 70$ mm, y 50 está en medio: hay **dos puntos**.

Para hallarlos se escriben las dos condiciones con los cuadrados, que evita las raíces: $x^2 + y^2 = 1.600$ y $(x - 50)^2 + y^2 = 900$. Restando la segunda de la primera se van los cuadrados de y: $-(-100x + 2.500) = 1.600 - 900$, o sea $100x - 2.500 = 700$.

De ahí $x = 3.200 \div 100 = 32$ mm, y sustituyendo, $y^2 = 1.600 - 1.024 = 576$, así que $y = 24$ o $y = -24$. Los dos puntos son **(32, 24)** y **(32, -24)**, simétricos respecto de la recta que une los centros.

Para corregirte, mide las dos distancias desde uno de ellos: de (32, 24) a O hay la raíz de $1.024 + 576 = 1.600$, o sea 40 mm; y a P, la raíz de $18^2 + 24^2 = 324 + 576 = 900$, o sea 30 mm. Las dos cuadran, y por eso el punto sirve.

Tangencias básicas razonadas por distancias

Lo que hay que saber

Una recta es **tangente** a una circunferencia cuando la toca en un solo punto. Eso ocurre exactamente cuando la distancia del centro a la recta es igual al radio. El punto de tangencia es el pie de la perpendicular a la recta trazada desde el centro.

Dos circunferencias son **tangentes exteriores** cuando la distancia entre sus centros es la suma de los radios, y **tangentes interiores** cuando es la diferencia, que tiene que ser distinta de cero: dos circunferencias del mismo radio y del mismo centro no son tangentes, son la misma. En los dos casos el punto de tangencia está en la recta que une los centros.

De ahí sale el método: cada condición de tangencia se traduce en una distancia, y el centro que se busca es el punto que cumple todas esas distancias a la vez. Con coordenadas eso se escribe como una ecuación por condición.

Cada una de esas distancias describe un lugar geométrico completo, no un punto suelto: por eso lo normal es que un problema de tangencias tenga *varias* soluciones, y conviene contarlas antes de quedarse con una.

▪ Que una circunferencia pase por un punto dado *no* demuestra que su centro sea el correcto: pasar por el punto es una de las condiciones, no todas, y además suele haber más de una solución. Hay que comprobar cada condición por separado.

Un **enlace** es un arco que une dos elementos siendo tangente a los dos, de modo que el paso de uno a otro sea suave. Se resuelve igual: localizar el centro por distancias y después hallar los puntos de tangencia.

Describe con números estos tres lugares geométricos: (a) los centros de las circunferencias de **25 mm** de radio tangentes a una recta dada; (b) los centros de las circunferencias de 25 mm de radio tangentes exteriormente a otra de **40 mm** de radio; (c) los mismos, pero tangentes interiormente.

Solución

(a) Que una circunferencia sea tangente a una recta significa que la distancia de su centro a la recta es igual al radio. Así que los centros están a 25 mm de la recta: son **dos rectas paralelas a la dada, una a cada lado, a 25 mm**.

(b) Dos circunferencias son tangentes exteriormente cuando la distancia entre sus centros es la suma de los radios: $40 + 25 = 65 \text{ mm}$. El lugar es la circunferencia concéntrica con la dada y de 65 mm de radio.

(c) Tangentes interiormente significa que la distancia entre centros es la diferencia de los radios: $40 - 25 = 15 \text{ mm}$. El lugar es la circunferencia concéntrica de 15 mm de radio.

▲ El apartado (c) tiene una condición escondida: la diferencia tiene que ser positiva, o sea la circunferencia pequeña queda dentro de la grande. Si los radios fueran 25 y 25 no habría lugar ninguno: dos circunferencias del mismo radio y del mismo centro son la misma circunferencia, y tienen infinitos puntos comunes en vez de uno de tangencia.

Para corregirte, comprueba cada caso con un centro concreto: uno a 65 mm da dos circunferencias que se tocan por fuera, porque $65 = 40 + 25$; uno a 15 mm da una dentro de la otra tocándose, porque $15 + 25 = 40$, que es el radio de la grande.

Una circunferencia tiene el centro en $O_1(0, 0)$ y **30 mm** de radio. Otra tiene el centro en $O_2(70, 0)$. ¿Qué radio ha de tener la segunda para ser (a) tangente exterior a la primera y (b) tangente interior? Da también los puntos de tangencia.

Solución

La distancia entre los centros es 70 mm, porque están los dos sobre el eje horizontal.

(a) En la tangencia exterior la distancia entre centros es la suma de los radios: $70 = 30 + r$, de donde $r = 40 \text{ mm}$. El punto de tangencia está en el segmento que une los centros, a 30 mm de O_1 : es el punto $(30, 0)$, que queda a $70 - 30 = 40 \text{ mm}$ de O_2 , como debe.

(b) En la tangencia interior una circunferencia queda dentro de la otra y la distancia entre centros es la diferencia de los radios: $70 = r - 30$, de donde $r = 100 \text{ mm}$. La pequeña queda dentro de la grande. Aquí el punto de tangencia no está entre los centros, sino en la prolongación: a 100 mm de O_2 en la dirección que va de O_2 hacia O_1 y más allá, es decir en $(70 - 100, 0) = (-30, 0)$, que queda a 30 mm de O_1 .

Para corregirte, comprueba en los dos casos que el punto de tangencia, los dos centros y nada más estén alineados, y que sus distancias a cada centro sean los radios: 30 y 40 en el primero, 30 y 100 en el segundo.

Halla el centro de una circunferencia de **25 mm** de radio que sea tangente al eje horizontal y pase por el punto $A(0, 40)$, con las medidas en milímetros.

Solución

Tangente al eje horizontal y con 25 mm de radio significa que el centro está a 25 mm de ese eje. Como A queda por encima, el centro es de la forma $(x, 25)$.

Que la circunferencia pase por A significa que la distancia del centro a A vale 25 mm: $x^2 + (25 - 40)^2 = 25^2$, o sea $x^2 + 225 = 625$.

De ahí $x^2 = 400$ y $x = 20$ o $x = -20$. Hay **dos soluciones**, simétricas respecto del eje vertical: los centros $(20, 25)$ y $(-20, 25)$. Las dos son correctas; el enunciado no da ningún dato que descarte una.

▪ Y por eso «si la circunferencia pasa por A, el centro está bien» no sirve de comprobación: aquí hay dos centros distintos que pasan por A y son tangentes al eje. Pasar por el punto confirma una de las dos condiciones, no que la solución sea única ni que sea la que buscas.

Para corregirte, comprueba las *dos* condiciones por separado en el centro que hayas elegido: su distancia al eje horizontal tiene que ser 25, y su distancia a A también. Con (20, 25) sale la raíz de $400 + 225 = 625$, o sea 25.

26

Halla el radio de las circunferencias tangentes a los dos ejes de coordenadas, con el centro en la zona donde las dos coordenadas son positivas. Han de pasar por el punto P(20, 90), con las medidas en milímetros.

Solución

Ser tangente a los dos ejes en esa zona obliga al centro a estar a la misma distancia de los dos, y esa distancia es el radio: el centro es (r, r). Ese es el lugar geométrico que resuelve media parte del problema, y es la bisectriz del ángulo que forman los ejes.

Pasar por P añade la condición $(20 - r)^2 + (90 - r)^2 = r^2$. Desarrollando: $400 - 40r + r^2 + 8.100 - 180r + r^2 = r^2$, y agrupando, $r^2 - 220r + 8.500 = 0$.

El discriminante vale $220^2 - 4 \cdot 8.500 = 48.400 - 34.000 = 14.400$, cuya raíz cuadrada es 120. Las soluciones son $r = (220 - 120) \div 2 = 50 \text{ mm}$ y $r = (220 + 120) \div 2 = 170 \text{ mm}$.

Las dos valen: una circunferencia pequeña que pasa por P por su lado de arriba y otra grande que lo hace por el de abajo. Los centros son (50, 50) y (170, 170).

Para corregirte, sustituye las dos en la condición: con 50, $(20 - 50)^2 + (90 - 50)^2 = 900 + 1.600 = 2.500 = 50^2$; con 170, $(20 - 170)^2 + (90 - 170)^2 = 22.500 + 6.400 = 28.900 = 170^2$. Las dos cuadran.

27

Una recta es el eje horizontal y una circunferencia tiene el centro en O(0, 96) y 30 mm de radio. Se quiere enlazarlas con un arco de 40 mm de radio tangente a la recta y tangente exteriormente a la circunferencia. Halla el centro del arco y los dos puntos de tangencia.

Solución

El centro del arco tiene que cumplir dos condiciones a la vez, y cada una es un lugar geométrico. Por ser tangente a la recta, está a 40 mm de ella: su segunda coordenada vale 40 o -40. La de -40 se cae, porque desde O, cuya segunda coordenada es 96, habría 136 mm de separación vertical, y el centro no puede estar a más de 70 mm de O. Queda la de 40. Por ser tangente exteriormente a la circunferencia, está a $30 + 40 = 70$ mm de O.

Poniendo el centro como (x, 40): $x^2 + (96 - 40)^2 = 70^2$, es decir $x^2 + 3.136 = 4.900$, de donde $x^2 = 1.764$ y $x = 42$ o $x = -42$. Hay **dos soluciones** simétricas respecto del eje vertical: el arco de centro (42, 40), con contactos (42, 0) y (18, 72), y el de centro (-42, 40), con contactos (-42, 0) y (-18, 72). Se detalla la primera.

El punto de tangencia con la recta es el pie de la perpendicular desde el centro, que en una recta horizontal es el punto de la misma abscisa: (42, 0).

El punto de tangencia con la circunferencia está en el segmento que une los dos centros. Queda a 30 mm de O de los 70 que hay hasta (42, 40), o sea avanzando 30/70 del camino: $(0 + 18, 96 - 24) = (18, 72)$.

Para corregirte, mide ese punto desde el centro del arco. De (42, 40) a (18, 72) hay la raíz de $24^2 + 32^2$, o sea la raíz de $576 + 1.024 = 1.600$: da 40 mm, el radio del arco. Y desde O hay la raíz de $18^2 + 24^2 = 324 + 576 = 900$, que da 30 mm.

El trazado de tangencias y las curvas técnicas

Lo que hay que saber

▪ **Este tema viene solo con la teoría y no trae ejercicios.** Los trazados piden compás, y un enunciado tendría que mandar dibujar. Los problemas de tangencia que sí se pueden resolver con números —hallar el centro y los puntos de tangencia por distancias— están en su propio tema, con ejercicios.

Los dos principios. Entre una recta y una circunferencia, el punto de tangencia está en el pie de la perpendicular a la recta por el centro. Entre dos circunferencias, está en la recta que une los dos centros. Casi todas las construcciones salen de aplicar uno de los dos.

Tangente a una circunferencia por un punto T de ella. Es la perpendicular al radio en T, y se traza con la construcción de la perpendicular por un punto de una recta.

Tangentes desde un punto exterior P. Se traza la circunferencia que tiene OP por diámetro, siendo O el centro; corta a la circunferencia dada en los dos puntos de tangencia; se une P con cada uno de ellos y esas dos rectas son las tangentes. Funciona porque esa circunferencia es el arco capaz de 90° sobre OP, y el radio y la tangente forman ángulo recto.

Enlace de dos rectas que se cortan con un arco de radio R. Se trazan dos paralelas a distancia R por dentro del ángulo; se cruzan en el centro del arco, que queda sobre la bisectriz. Los puntos de tangencia son los pies de las perpendiculares desde ese centro a cada recta, y el enlace se cierra trazando con ese centro y radio R el arco que va de un pie al otro.

Enlace de una recta con una circunferencia, o de dos circunferencias. El centro del arco se busca cruzando dos lugares. Uno es una paralela a la recta a distancia R. El otro, una circunferencia concéntrica: de radio $R + r$ si la tangencia es exterior, o del valor absoluto de $R - r$ si es interior. Con dos circunferencias se cruzan los dos lugares concéntricos, uno por cada una. De los cortes que salgan se elige el que deje el arco por el lado que interesa. Los puntos de tangencia se hallan uniendo ese centro con el de cada circunferencia dada, o bajando la perpendicular a la recta. Y el enlace se cierra trazando entre ellos el arco de radio R.

Curvas técnicas. El **óvalo** es una curva cerrada formada por cuatro arcos tangentes dos a dos, con dos ejes de simetría. El **ovoide** también tiene cuatro arcos pero un solo eje de simetría, así que sale con un extremo más ancho que el otro. En los dos, los cuatro centros y los cuatro puntos de tangencia dependen del dato de partida —los dos ejes, uno solo de ellos, o un rombo dado—, y por eso aquí van como definición: el trazado concreto pide tener delante ese dato. Lo que no cambia es la regla de cierre: cada punto de unión tiene que estar alineado con los centros de los dos arcos que une.

La espiral de dos centros sí se cuenta entera. Se toma un segmento corto AB, que es el núcleo. Con centro en A y radio AB se traza media vuelta, que acaba en un punto C de la recta AB, al otro lado de A. Con centro en B y radio BC se traza la media vuelta siguiente, que acaba en D. Con centro en A y radio AD, la siguiente, y así alternando A y B. Como cada arco empieza donde acabó el anterior y los dos centros están sobre esa misma recta, los arcos salen tangentes y el radio crece el núcleo en cada media vuelta.

▲ Que dos arcos «queden bien» a la vista no demuestra que sean tangentes: dos arcos que se cortan formando un ángulo pequeño parecen suaves. Lo que se comprueba es que el punto de unión y los dos centros estén alineados, y que las distancias a los centros sean los radios.

El punto y la recta en el sistema diédrico, por coordenadas

Lo que hay que saber

El sistema diédrico proyecta sobre dos planos perpendiculares: el **plano horizontal** y el **plano vertical**. Su recta común es la **línea de tierra**. Se añade un tercero, el **plano de perfil**, perpendicular a los otros dos.

Un punto se da por tres coordenadas: la distancia al plano de perfil, el **alejamiento** (distancia al plano vertical) y la **cota** (distancia al plano horizontal). La **proyección horizontal** conserva el alejamiento y pierde la cota; la **proyección vertical**, al revés.

Los signos deciden el **cuadrante**: alejamiento y cota positivos, primero; alejamiento negativo y cota positiva, segundo; las dos negativas, tercero; alejamiento positivo y cota negativa, cuarto. Signo y distancia son cosas distintas: el signo dice de qué lado, y la distancia es siempre positiva.

Los **planos bisectores** parten en dos los ángulos diedros: en el primero el alejamiento y la cota son iguales y del mismo signo; en el segundo son iguales en valor y de signo contrario.

Una recta queda determinada por dos puntos, y sus **trazas** son los puntos donde corta a los planos de proyección: la traza horizontal tiene cota cero y la vertical, alejamiento cero.

▲ Para la distancia real entre dos puntos se restan sus coordenadas una a una, se elevan al cuadrado las tres diferencias, se suman y se extrae la raíz. Sobre el papel sale en dos pasos, con un triángulo rectángulo cuyos catetos son la separación de las dos proyecciones horizontales y el desnivel de cotas: los dos caminos dan el mismo número.

28

Un punto tiene por coordenadas A(**30, 20, 15**), en milímetros, donde la primera es la distancia al plano de perfil, la segunda el alejamiento y la tercera la cota. (a) ¿En qué cuadrante está? (b) ¿Cuáles son sus dos proyecciones? (c) ¿A qué distancia queda de cada uno de los tres planos?

Solución

(a) El cuadrante lo deciden los signos del alejamiento y de la cota. Alejamiento positivo quiere decir por delante del plano vertical, y cota positiva, por encima del horizontal. Las dos son positivas, así que A está en el **primer cuadrante**.

(b) La proyección horizontal se obtiene dejando caer el punto sobre el plano horizontal, así que conserva la primera coordenada y el alejamiento y pierde la cota: **(30, 20)** sobre el plano horizontal.

La proyección vertical se obtiene llevándolo sobre el plano vertical, así que conserva la primera coordenada y la cota: **(30, 15)** sobre el plano vertical.

(c) La distancia al plano horizontal es la cota, **15 mm**; la distancia al plano vertical es el alejamiento, **20 mm**; y la distancia al plano de perfil es la primera coordenada, **30 mm**.

Para corregirte, comprueba que cada proyección ha perdido exactamente la coordenada que mide la distancia a su plano: la horizontal pierde la cota y la vertical pierde el alejamiento. Si una proyección conserva las tres, no es una proyección.

29

Di en qué cuadrante está cada uno de estos dos puntos y a qué distancia queda de los dos planos de proyección: (a) B(**40, -25, 18**); (b) C(**50, 30, -12**). Medidas en milímetros.

Solución

(a) B tiene el alejamiento negativo y la cota positiva: queda por detrás del plano vertical y por encima del horizontal. Eso es el **segundo cuadrante**.

Las distancias se miden siempre como cantidades positivas: B está a **25 mm** del plano vertical y a **18 mm** del horizontal.

(b) C tiene el alejamiento positivo y la cota negativa: por delante del plano vertical y por debajo del horizontal. Eso es el **cuarto cuadrante**.

C está a **30 mm** del plano vertical y a **12 mm** del horizontal.

▲ El signo y la distancia son dos cosas distintas y conviene decirlas por separado: el signo dice de qué lado está el punto y la distancia, cuánto. Un punto de cota -12 no está «a -12 mm» de ningún sitio.

30

Un punto D del primer cuadrante equidista de los dos planos de proyección, y su distancia al plano horizontal es de **35 mm**. (a) ¿Cuánto valen su alejamiento y su cota? (b) ¿A qué distancia queda de la línea de tierra?

Solución

(a) La distancia al plano horizontal es la cota, así que la cota vale **35 mm**. Equidistar de los dos planos significa que el alejamiento vale lo mismo: **35 mm** también. Un punto así está en el primer plano bisector.

(b) La línea de tierra es la recta común a los dos planos de proyección. La distancia de D a ella es la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos catetos son el alejamiento y la cota.

Vale la raíz de $35^2 + 35^2 = 1.225 + 1.225 = 2.450$ mm², es decir **$35\sqrt{2}$ mm**.

Como $49,49^2 = 2.449,2601$ se queda corto y $49,50^2 = 2.450,25$ se pasa, la distancia está entre **49,49 y 49,50 mm**.

Para corregirte, mira las unidades y el orden de magnitud: dentro de la raíz se suman milímetros cuadrados y fuera salen milímetros, y el resultado tiene que ser mayor que cualquiera de los dos catetos y menor que su suma, 70 mm.

31

Dos puntos del primer cuadrante tienen por coordenadas A(**10, 20, 15**) y B(**30, 50, 75**), en milímetros. Calcula la distancia real entre ellos.

Solución

Las diferencias de coordenadas son $30 - 10 = 20$, $50 - 20 = 30$ y $75 - 15 = 60$ mm.

La distancia es la raíz cuadrada de la suma de los tres cuadrados: $20^2 + 30^2 + 60^2 = 400 + 900 + 3.600 = 4.900$ mm², y su raíz es **70 mm**.

Se llega al mismo número por el camino que se usa sobre el papel, que va en dos pasos. Primero, la distancia entre las dos proyecciones horizontales, que es la raíz de $20^2 + 30^2 = 1.300$ mm², entre 36,05 y 36,06 mm.

Y después, un triángulo rectángulo con ese valor como un cateto y la diferencia de cotas, 60 mm, como el otro: la raíz de $1.300 + 3.600 = 4.900$ mm², otra vez **70 mm**.

Para corregirte, fíjate en las unidades: dentro de la raíz se suman milímetros cuadrados y fuera salen milímetros. Si sumas una distancia con un cuadrado de distancia, la cuenta no es que dé mal, es que no significa nada.

Perspectivas isométrica y caballera: los coeficientes de reducción

Lo que hay que saber

En el **sistema axonométrico** se proyecta sobre un solo plano con rayos paralelos, de modo que las tres dimensiones se ven a la vez en un único dibujo. Si los rayos son perpendiculares al plano, el sistema es **ortogonal**; si van inclinados, **oblicuo**.

La **perspectiva isométrica** es el caso ortogonal en que los tres ejes forman entre sí 120° , así que las tres direcciones se acortan por igual. El **coeficiente de reducción** teórico es el mismo para las tres y vale la raíz cuadrada de $2/3$.

En la práctica se suele dibujar sin aplicarlo, llevando las medidas reales sobre los ejes: eso es el **dibujo isométrico**. Sale más grande que la perspectiva isométrica propiamente dicha, en una razón que es la inversa del coeficiente.

La **perspectiva caballera** es axonométrica oblicua: el plano de proyección es paralelo a una cara del objeto, así que esa cara se dibuja en verdadera magnitud. Solo el eje de profundidad se inclina 45° es lo corriente— y lleva un coeficiente de reducción, normalmente $1/2$, $2/3$ o $3/4$.

- El coeficiente se aplica *solo* al eje de profundidad de la caballera. Las medidas paralelas a los otros dos ejes van tal cual, y reducirlas también es un error que deforma la pieza sin que se note a simple vista.

Para ir del dibujo a la realidad se divide entre el coeficiente; de la realidad al dibujo, se multiplica. Como el coeficiente no llega a la unidad, la medida real tiene que salir mayor que la dibujada: ese es el control que distingue haber aplicado el coeficiente del derecho o del revés.

32

En la perspectiva isométrica las tres direcciones principales se acortan por igual, y el coeficiente de reducción vale la raíz cuadrada de $2/3$. Una arista paralela a una de esas tres direcciones mide en la realidad **60 mm**. (a) ¿Cuánto mide en la perspectiva isométrica con reducción? (b) ¿Y en el dibujo isométrico, que se hace sin aplicarla? (c) ¿Cuántas veces mayor sale este último?

Solución

La raíz de $2/3$ se escribe también $\sqrt{6} \div 3$, racionalizando el denominador con $\sqrt{3}$. Su cuadrado vale $6 \div 9 = 2/3$, y como $0,8164^2 = 0,66650896$ y $0,8165^2 = 0,66667225$ dejan en medio a $2/3 = 0,6666\dots$, el coeficiente está entre **0,8164 y 0,8165**.

(a) La arista dibujada mide $60 \cdot \sqrt{6} \div 3 = 20\sqrt{6}$ mm. Su cuadrado vale 2.400, y como $48,98^2 = 2.399,0404$ y $48,99^2 = 2.400,0201$, queda entre 48,98 y 48,99 mm.

(b) El dibujo isométrico es el que se hace llevando las medidas reales sobre los ejes, sin reducir: la arista mide **60 mm**.

(c) La razón entre los dos es 1 dividido entre $\sqrt{6} \div 3$, o sea $3 \div \sqrt{6} = \sqrt{6} \div 2$. Su cuadrado vale $6 \div 4 = 1,5$. Como $1,2247^2 = 1,49989009$ se queda corto y $1,2248^2 = 1,50013504$ se pasa, la razón cae entre 1,2247 y 1,2248. El dibujo isométrico sale un 22 % largo.

Para corregirte, encadena los dos apartados: $20\sqrt{6}$ multiplicado por $\sqrt{6} \div 2$ tiene que devolver 60, porque $20 \cdot 6 \div 2 = 60$. Si no vuelves al dato de partida, has aplicado el coeficiente al revés.

33

En la perspectiva caballera los ejes horizontal y vertical van en verdadera magnitud y el eje de profundidad lleva un coeficiente de reducción. Una pieza mide **80 mm** de ancho, **50 mm** de profundidad y **40 mm** de alto. ¿Qué tres medidas se llevan al dibujo con un coeficiente (a) de $1/2$, (b) de $2/3$ y (c) de $3/4$?

Solución

El ancho y el alto no cambian con ningún coeficiente: son **80 mm** y **40 mm** en los tres casos. Lo único que se reduce es la profundidad.

(a) Con $1/2$: $50 \cdot 1/2 = 25$ mm de profundidad.

(b) Con $2/3$: $50 \cdot 2/3 = 100/3$ mm, es decir entre **33,33 y 33,34 mm**.

(c) Con $3/4$: $50 \cdot 3/4 = 37,5$ mm.

Para corregirte, comprueba que los tres resultados quedan por debajo de los 50 mm reales y ordenados igual que los coeficientes: $1/2$ es menor que $2/3$, que es menor que $3/4$, y en el mismo orden salen 25, algo más de 33 y 37,5.

34

Un segmento paralelo al eje de profundidad mide **63 mm** en una perspectiva caballera de coeficiente **$3/4$** . (a) ¿Cuánto mide en la realidad? (b) ¿Qué medida habría salido si se hubiera tomado el coeficiente invertido, $4/3$?

Solución

(a) Para ir del dibujo a la realidad se deshace el coeficiente, es decir se divide entre $3/4$, que es lo mismo que multiplicar por $4/3$: $63 \cdot 4 \div 3 = 84$ mm.

(b) Con el coeficiente invertido se dividiría entre $4/3$, o sea se multiplicaría por $3/4$: $63 \cdot 3 \div 4 = 47,25$ mm.

▲ Los dos resultados son creíbles, y ahí está la trampa: 84 mm y 47,25 mm son dos medidas perfectamente posibles para una pieza. Lo que distingue el acierto del error no es el número, es el *sentido*: $3/4$ no llega a la unidad, así que reduce, y por tanto la medida real tiene que salir **mayor** que la del dibujo. 47,25 mm es menor que 63 y queda descartada solo por eso.

Para corregirte, vuelve del resultado al dato aplicando el coeficiente hacia delante: $84 \cdot 3 \div 4 = 63$ mm, que es lo que medía en el dibujo.

El sistema de planos acotados: cota, pendiente e intervalo

Lo que hay que saber

En el **sistema de planos acotados** se proyecta sobre un solo plano horizontal y se escribe al lado de cada punto su **cota**, es decir su altura. Es el sistema de los planos de terreno, las cubiertas y la obra civil.

Una recta queda determinada por dos puntos acotados. Su **pendiente** es el desnivel dividido entre la distancia medida en proyección, y su **intervalo** es lo contrario: la distancia en proyección que hay que recorrer para ganar una unidad de cota.

Pendiente e intervalo son inversos, así que su producto vale 1. Para que ese control sirva hacen falta dos cosas. La primera, que la recta suba de verdad: si es horizontal, la pendiente es cero y no hay intervalo que valga; si fuese vertical, no habría distancia en proyección. La segunda, que el intervalo se mida sobre el terreno y en la misma unidad que la cota, no sobre el papel. La pendiente no lleva unidad y suele darse en tanto por ciento.

Graduar una recta es marcar sobre su proyección los puntos de cota entera. Quedan igual de separados, a una distancia igual al intervalo, porque la recta sube de manera uniforme.

Las **curvas de nivel** unen los puntos del terreno que tienen la misma cota. Cuanto más juntas están en el plano, más inclinado es el terreno, porque el mismo desnivel se recorre en menos distancia.

▲ Casi todos los ejercicios de este tema mezclan dos conversiones: la del desnivel a distancia en proyección horizontal, que usa la pendiente, y la de la distancia real a la del papel, que usa la escala. Conviene hacerlas en dos pasos separados y comprobar el sentido de cada una.

35

Una recta del terreno pasa por A, de cota **20 m**, y por B, de cota **44 m**. La distancia entre sus proyecciones sobre el plano horizontal es de **60 m**. Calcula (a) la pendiente y (b) el intervalo.

Solución

El desnivel entre A y B es $44 - 20 = \mathbf{24\ m}$, y ese desnivel se recorre a lo largo de 60 m medidos en proyección horizontal.

(a) La pendiente es el desnivel dividido entre la distancia en proyección horizontal: $24 \div 60 = \mathbf{0,4}$, es decir un **40 %**. Es un número sin unidad, porque se dividen metros entre metros.

(b) El intervalo es lo contrario: la distancia en proyección horizontal que hay que recorrer para subir un metro. Vale $60 \div 24 = \mathbf{2,5\ m}$ por cada metro de cota.

Para corregirte, multiplica las dos: en una recta que sube, y midiendo las dos con la misma unidad y sobre el terreno, la pendiente por el intervalo tiene que dar 1, porque son inversas. Aquí, $0,4 \cdot 2,5 = 1$. Si te sale cualquier otra cosa, una de las dos divisiones está hecha al revés.

36

Una ladera tiene una pendiente del **25 %**. (a) ¿Qué distancia horizontal hay entre dos curvas de nivel que se llevan **4 m** de cota? (b) ¿Cuánto mide esa distancia en un plano a escala **1:500**?

Solución

Una pendiente del 25 % es la razón $25 \div 100 = 0,25$, es decir se sube un cuarto de metro por cada metro recorrido en proyección horizontal.

(a) El intervalo, que es la distancia en proyección horizontal por cada metro de cota, vale $1 \div 0,25 = \mathbf{4\ m}$. Para subir 4 m hacen falta, por tanto, $4 \cdot 4 = \mathbf{16\ m}$.

(b) A escala 1:500 se divide entre 500. Pasando primero a milímetros, 16 m son 16.000 mm, y $16.000 \div 500 = \mathbf{32\ mm}$.

Para corregirte, deshaz los dos pasos: 32 mm en el plano por 500 dan 16.000 mm, o sea 16 m; y 16 m con pendiente 0,25 suben $16 \cdot 0,25 = 4\ m$, que es el dato. Comprueba también el sentido de la escala: 1:500 reduce, así que en el papel tiene que salir menos que en el terreno.

37

Una recta pasa por A, de cota **12 m**, y por B, de cota **30 m**, y entre sus proyecciones hay **45 m**. ¿A qué distancia de la proyección de A, medida en proyección horizontal, está el punto de cota **20 m**?

Solución

Graduar una recta es marcar sobre su proyección los puntos de cota entera, y todos quedan igual de separados porque la recta sube de manera uniforme.

El desnivel total es $30 - 12 = \mathbf{18\ m}$, repartidos en 45 m de proyección horizontal. El intervalo vale entonces $45 \div 18 = \mathbf{2,5\ m}$ por cada metro de cota.

Del punto A al de cota 20 m hay $20 - 12 = 8\ m$ de subida, que en proyección horizontal son $8 \cdot 2,5 = \mathbf{20\ m}$.

Para corregirte, calcula también el trozo que queda: del de cota 20 al de cota 30 hay 10 m de subida, o sea $10 \cdot 2,5 = 25\ m$ en proyección horizontal. Y $20 + 25 = 45\ m$, que es la distancia total del enunciado.

El sistema cónico: fundamentos y elementos

Lo que hay que saber

▪ **Este tema viene solo con la teoría y no trae ejercicios.** Los problemas del sistema cónico se resuelven sobre el cuadro, midiendo y trazando, y un enunciado tendría que mandar mirar un dibujo. Aquí van los fundamentos y el vocabulario, que es lo que se puede contar con palabras.

En diédrico y en axonométrico los rayos de proyección son paralelos; en el **sistema cónico** salen todos de un punto, el ojo del observador. Por eso lo que está lejos se dibuja más pequeño, y por eso es la representación que más se parece a lo que se ve.

Los elementos. El **punto de vista** es el ojo. El **plano del cuadro** es donde se dibuja, y se pone entre el observador y el objeto. El **plano geometral** es el suelo sobre el que se apoya el objeto. La **línea de tierra** es el corte del cuadro con el geometral.

Todo lo que sigue supone el caso normal: el cuadro *vertical*, es decir perpendicular al geometral. La **línea del horizonte** está entonces en el cuadro a la altura del ojo. Sobre ella cae el **punto principal**, que es la proyección *perpendicular* del punto de vista sobre el cuadro. A los dos lados del punto principal, a la misma distancia que separa al observador del cuadro, están los **puntos de distancia**.

Las rectas paralelas entre sí que no lo son al cuadro se dibujan concurrentes en un **punto de fuga**, y todas las de una misma dirección comparten el suyo. Las paralelas al cuadro siguen dibujándose paralelas.

Perspectiva frontal. Una cara principal del objeto se pone paralela al cuadro. Sus aristas horizontales y verticales se dibujan entonces sin fugar, y solo las de profundidad van al punto principal. Es la de un punto de fuga.

Perspectiva oblicua. El objeto se gira respecto del cuadro alrededor de un eje vertical, así que las dos direcciones horizontales fugan a dos puntos distintos del horizonte y, por seguir siendo paralelas al cuadro, solo las verticales quedan verticales. Es la de dos puntos de fuga.

▲ Lo único que se dibuja en verdadera magnitud es lo que está contenido en el plano del cuadro. Todo lo demás cambia de tamaño con la distancia. En diédrico no ocurre eso —una misma medida sale igual esté cerca o lejos—, aunque tampoco allí se lee cualquier longitud: en verdadera magnitud solo salen las paralelas al plano de proyección, y las demás hay que llevarlas antes a una posición paralela a él.

Vistas normalizadas, líneas normalizadas y acotación

Lo que hay que saber

▪ **Este tema viene solo con la teoría y no trae ejercicios.** Elegir vistas y acotar son cosas que se hacen dibujando, y un enunciado tendría que mandar mirar una pieza que esta página no puede poner. Lo que sigue son las reglas, que sí se pueden contar y se pueden aprender.

De las seis vistas posibles se dibujan solo las necesarias, y en una pieza sencilla suelen ser tres: el **alzado** (de frente), la **planta** (desde arriba) y una **vista de perfil**. Como alzado se elige la que más información da de la pieza y la que deja menos aristas ocultas.

Dónde se colocan. En el sistema europeo, o del primer diedro, la planta va debajo del alzado y la vista de perfil izquierda se dibuja a la derecha. En el americano, o del tercer diedro, van al contrario. Cuál se usa se indica con un símbolo junto al cajetín, y conviene mirarlo antes que nada: unas mismas tres vistas leídas con el sistema equivocado describen una pieza que no es la del plano.

La correspondencia. Alzado y planta comparten la anchura; alzado y vista de perfil comparten la altura; planta y vista de perfil comparten la profundidad. Si una medida no cuadra en las tres, alguna vista está mal colocada o mal dibujada.

Las líneas. Continua gruesa para las aristas vistas; discontinua fina para las ocultas; de trazo y punto fina para los ejes y las trazas de simetría; continua fina para las líneas de cota, las de referencia y los rayados; y a mano alzada o en zigzag para las roturas.

Acotar —y el resultado es la **acotación** del plano— es escribir las medidas que hacen falta para fabricar la pieza. Cada medida se pone *una sola vez* y en la vista que mejor la define. Las líneas de cota van paralelas a la arista que miden y separadas de la pieza; las de referencia salen de la pieza y sobresalen un poco de la línea de cota.

La cifra de cota se escribe centrada sobre la línea de cota, de modo que se lea desde abajo o desde la derecha. Y dice *cuánto mide la pieza de verdad*, no cuánto mide el papel: eso no cambia aunque cambie la escala. La unidad es el milímetro y no se escribe; si se usa otra, se dice en el cajetín. Delante de la cifra se pone **Ø** para un diámetro y **R** para un radio. La línea de cota se remata en sus dos extremos, normalmente con flechas, y la norma admite además trazos oblicuos o puntos.

▲ Dos reglas que evitan un plano ilegible: no se acota sobre aristas ocultas, porque la medida queda sin confirmar; y las cotas pequeñas van dentro y las grandes fuera, para que las líneas de referencia no se crucen con las de cota.