

Ejercicios Resueltos Dibujo Técnico 2 de Bachillerato 2026 / 2027

43 ejercicios con la solución explicada paso a paso, y la teoría de los 18 temas que trae esta selección.

Lo que vas a practicar

Potencia de un punto respecto de una circunferencia · Calcular la potencia por coordenadas, leer su signo y sacar de ella la longitud del segmento de tangente **(ejercicios 1, 2, 3, 4)**

Eje radical y centro radical · Situar el eje radical de dos circunferencias por sus coordenadas, hallar el centro radical de tres y medir desde él **(ejercicios 5, 6, 7)**

La inversión y sus elementos dobles · Hallar el inverso de un punto por la razón de inversión, distinguir la razón positiva de la negativa y deducir la razón que lleva una circunferencia a otra **(ejercicios 8, 9, 10)**

Tangencias resueltas con la potencia y con los lugares de centros · Hallar puntos de contacto con la potencia, situar centros cruzando dos lugares y medir tangentes comunes **(ejercicios 11, 12, 13)**

La elipse: focos, ejes y excentricidad · Relacionar los tres semiejes, calcular la excentricidad y comprobar la definición por los radios vectores **(ejercicios 14, 15, 16, 17)**

La hipérbola: focos, asíntotas y excentricidad · Relacionar el eje real, el imaginario y la distancia focal, calcular la excentricidad y la pendiente de las asíntotas **(ejercicios 18, 19, 20)**

La parábola: foco, directriz y parámetro · Usar la definición por foco y directriz, situar el vértice y relacionar las coordenadas con el parámetro **(ejercicios 21, 22, 23)**

Rectas tangentes a una cónica y circunferencias focales · Manejar la circunferencia focal y la principal, y contar cuántas tangentes salen de un punto **(ejercicios 24, 25, 26)**

Homología y afinidad · los elementos de una homología, cómo se halla un punto homólogo paso a paso y el caso particular de la afinidad **(solo teoría)**

Verdadera magnitud de segmentos y ángulos en el sistema diédrico · Sacar la medida real de un segmento a partir de sus dos proyecciones y calcular el seno del ángulo que forma con cada plano **(ejercicios 27, 28, 29, 30)**

Giros y cambios de plano, por coordenadas · Seguir qué dato se conserva en cada cambio de plano y en cada giro, y calcular las coordenadas nuevas **(ejercicios 31, 32, 33)**

Abatimientos: la verdadera forma de una cara plana · qué es abatir, el triángulo que da la distancia abatida y el camino de vuelta, paso a paso **(solo teoría)**

Secciones planas de cuerpos y su verdadera magnitud · cómo se corta un cuerpo por un plano, cómo se obtiene la forma real de la sección y cómo se desarrolla la superficie **(solo teoría)**

El sistema axonométrico ortogonal: coeficientes y escalas · Calcular los coeficientes de reducción de la dimetría y la trimetría y aplicarlos a una medida real (**ejercicios 34, 35, 36, 37**)

La perspectiva cónica: representación de sólidos · los elementos del sistema, el método del punto de distancia y el paso de las vistas al dibujo, con medidas (**solo teoría**)

Cubiertas y perfiles de terreno en el sistema de planos acotados · Calcular cotas y longitudes de una cubierta a dos y a cuatro aguas e interpolar cotas entre curvas de nivel (**ejercicios 38, 39, 40**)

Cortes, secciones y roturas en los planos de taller · qué es un corte y en qué se diferencia de una sección, cómo se marca y se raya. Y para qué sirve una rotura (**solo teoría**)

Acotación funcional y tolerancias · Calcular medidas límite, tolerancias, juegos de un ajuste y la acumulación de errores según cómo se repartan las cotas (**ejercicios 41, 42, 43**)

Material propio de solucionario.es. Los enunciados y las soluciones están escritos por nosotros. La versión al día, con más ejercicios y de todos los cursos, está siempre en:

solucionario.es

Qué entra aquí y qué no. Y por qué esta página es desigual a propósito. Esto cubre **Dibujo Técnico II**, la asignatura de segundo de Bachillerato, con los dieciocho temas del cuadro. ▲ **No sustituye a un cuaderno de láminas**, y conviene decirlo claro desde el principio: un archivo de texto no puede llevar dibujos. Así que **trece temas traen teoría y ejercicios y cinco traen solo la teoría. Con ejercicios** van los trece temas que se resuelven con números y con razonamiento, sin trazar nada: la potencia de un punto respecto de una circunferencia; el eje radical y el centro radical; la inversión y sus elementos dobles; las tangencias resueltas con la potencia y con los lugares de centros; la elipse, la hipérbola y la parábola por su definición métrica, con sus focos, su excentricidad y sus directrices; las rectas tangentes a una cónica con las circunferencias focales; la verdadera magnitud de segmentos y ángulos en el sistema diédrico; los giros y los cambios de plano por coordenadas; los coeficientes del sistema axonométrico ortogonal; las cubiertas y los perfiles de terreno; y la acotación funcional con sus tolerancias y sus ajustes. **Solo con la teoría** vienen cinco temas, porque el ejercicio pediría mirar o trazar algo que este archivo no puede llevar: **Homología y afinidad**; **Abatimientos**, con la verdadera forma de una cara plana; **Secciones planas de cuerpos y su verdadera magnitud**, con el desarrollo de superficies; **La perspectiva cónica**, con la representación de sólidos; y **Cortes, secciones y roturas en los planos de taller**. En esos cinco la explicación va paso a paso y con las medidas, para que se pueda estudiar y después hacer sobre el papel con regla y compás. Es menos de lo que sería con dibujos, y más que nada. **Queda fuera a propósito** lo que es de **Dibujo Técnico I**, el curso anterior: los trazados con regla y compás, la construcción de triángulos y polígonos, las tangencias básicas, los lugares geométricos con el arco capaz, la proporcionalidad y la sección áurea, las escalas, los formatos normalizados, las perspectivas isométrica y caballera con sus coeficientes, los fundamentos de los planos acotados y las vistas normalizadas con su acotación. También queda fuera el bloque de **sistemas CAD**, que se aprende delante de la pantalla y no en un archivo de texto. Todo lo que hay aquí se hace con lápiz, papel y una calculadora corriente. Sirve para localizar lo que flojea; no sustituye al libro ni a las clases.

Potencia de un punto respecto de una circunferencia

Lo que hay que saber

La **potencia** de un punto P respecto de una circunferencia de centro O y radio r es el cuadrado de la distancia OP menos el cuadrado del radio. Se mide en milímetros cuadrados, porque es una diferencia de dos áreas, y puede salir positiva, nula o negativa.

El **signo** dice dónde está el punto: positiva si P queda fuera, cero si está sobre la propia circunferencia y negativa si está dentro. Es lo primero que conviene mirar, antes que el número.

Cuando P es exterior, la potencia vale el cuadrado del **segmento de tangente** que va de P al punto de contacto. Así que la raíz de la potencia es esa longitud.

La propiedad que la hace útil: por cualquier recta que pase por P y corte a la circunferencia en dos puntos, el **producto de las dos distancias** desde P vale siempre lo mismo. Y ese valor es la potencia en valor absoluto. No depende de qué recta se elija.

- El signo no es un adorno: si se pierde por el camino, un punto interior se confunde con uno exterior y se acaba sacando la raíz de un número negativo, que no existe. Conviene escribirlo aparte y arrastrarlo hasta el final.

De aquí sale casi todo el bloque: el eje radical, el centro radical y buena parte de las tangencias son consecuencias de esta sola definición.

1

Sobre unos ejes cualesquiera, una circunferencia queda centrada en O(20, 15) y su radio mide **25 mm**. Se toma el punto P(60, 45). Calcula: (a) la distancia de P al centro; (b) la potencia de P respecto de esa circunferencia; (c) la longitud del segmento de tangente que va de P hasta el punto de contacto.

Solución

(a) De O a P hay $60 - 20 = 40$ mm en horizontal y $45 - 15 = 30$ mm en vertical. El cuadrado de la distancia vale $40^2 + 30^2 = 1.600 + 900 = \mathbf{2.500 \text{ mm}^2}$. Así que $d = \mathbf{50 \text{ mm}}$.

(b) La potencia es el cuadrado de esa distancia menos el cuadrado del radio: $2.500 - 625 = \mathbf{1.875 \text{ mm}^2}$. Fíjate en la unidad: sale en milímetros cuadrados, porque es una diferencia de dos áreas.

Como el resultado es positivo, P queda **fuera** de la circunferencia.

(c) Desde un punto exterior, el segmento de tangente al cuadrado vale justo la potencia: $t^2 = 1.875 \text{ mm}^2$, de donde $t = \sqrt{1.875} = \sqrt{(625 \cdot 3)} = \mathbf{25\sqrt{3} \text{ mm}}$.

Ese valor está entre **43,30 y 43,31 mm**. Y se demuestra elevando al cuadrado los dos límites: $43,30^2 = 1.874,89$ se queda corto y $43,31^2 = 1.875,7561$ se pasa.

Para corregirte, deshaz la cuenta: $50^2 - 25\sqrt{3}$ al cuadrado ha de dar 625, el cuadrado del radio. Y comprueba el signo antes que nada: si te sale negativo con un punto que está claramente fuera, has restado al revés.

2

Otra circunferencia queda centrada en O(0, 0) y su radio mide **50 mm**. El punto P está en (18, 24). Calcula: (a) su potencia; (b) dónde queda P; (c) cuánto mide cada mitad de la cuerda que pasa por P y es perpendicular a OP.

Solución

(a) El cuadrado de la distancia de O a P vale $18^2 + 24^2 = 324 + 576 = 900 \text{ mm}^2$; o sea, $d = 30 \text{ mm}$. La potencia es $900 - 2.500 = \mathbf{-1.600 \text{ mm}^2}$.

(b) Sale **negativa**, y eso quiere decir que P está **dentro**. Dentro no hay segmento de tangente. Por eso el número no puede ser un cuadrado positivo.

(c) La mitad de esa cuerda, el radio y la distancia OP forman un triángulo rectángulo: la mitad al cuadrado vale $2.500 - 900 = 1.600 \text{ mm}^2$, de donde mide **40 mm**.

Los dos trozos en que P parte la cuerda miden los dos 40 mm. Y su producto, $40 \cdot 40 = 1.600 \text{ mm}^2$, es exactamente el valor absoluto de la potencia. Esa es la propiedad que hace útil el signo: el número mide siempre el producto de los dos trozos.

Para corregirte, prueba con otra cuerda cualquiera que pase por P: el producto de los dos trozos tiene que volver a dar 1.600 mm^2 .

3

Desde un punto P exterior, una recta secante corta a una circunferencia en A y en B, con $PA = 20 \text{ mm}$ y $PB = 45 \text{ mm}$. Otra secante que también pasa por P la corta en C y en D, con $PC = 25 \text{ mm}$. Halla: (a) la potencia de P; (b) la longitud PD; (c) la del segmento de tangente desde P.

Solución

(a) El producto de las dos distancias de una misma secante vale siempre lo mismo. Y ese valor es la potencia: $20 \cdot 45 = 900 \text{ mm}^2$.

(b) Con la segunda secante el producto ha de ser el mismo: $25 \cdot PD = 900 \text{ mm}^2$, de donde $PD = 900 \div 25 = 36 \text{ mm}$.

(c) El segmento de tangente al cuadrado vale la potencia: $t = \sqrt{900} = 30 \text{ mm}$.

Para corregirte, mira que los tres resultados encajen entre sí: $20 \cdot 45 = 900$, $25 \cdot 36 = 900$ y $30 \cdot 30 = 900$. El caso de la tangente es el de la secante cuando los dos puntos de corte se juntan en uno.

4

Un punto P está a **50 mm** del centro O de una circunferencia. Calcula: (a) qué radio hace que la potencia de P valga **900 mm²**; (b) qué radio la deja en cero; (c) cuánto valdría la potencia con un radio de **60 mm**, y dónde quedaría P.

Solución

(a) La potencia es 50^2 menos el cuadrado del radio. Así que $2.500 - r^2 = 900 \text{ mm}^2$. De ahí $r^2 = 1.600 \text{ mm}^2$ y $r = 40 \text{ mm}$.

(b) Que la potencia valga cero significa $2.500 - r^2 = 0$, es decir $r = 50 \text{ mm}$: el radio coincide con la distancia y P cae **sobre** la propia circunferencia.

(c) Con $r = 60 \text{ mm}$ queda $2.500 - 3.600 = -1.100 \text{ mm}^2$. Es negativa. Así que P está **dentro**.

Se ve el orden completo: con el radio pequeño el punto queda fuera, al crecer el radio hasta los 50 mm el punto se sube a la curva. Y a partir de ahí queda dentro.

Para corregirte, invierte el primer apartado: $50^2 - 40^2 = 2.500 - 1.600 = 900 \text{ mm}^2$, que es la potencia que pedía el enunciado.

Eje radical y centro radical

Lo que hay que saber

El **eje radical** de dos circunferencias sin centro común reúne todos los puntos con idéntica potencia respecto de una y de otra. Es siempre una recta perpendicular al segmento que une un centro con el otro.

Se halla igualando las dos potencias escritas con coordenadas. El término de segundo grado desaparece a ambos lados y sobra una ecuación de primer grado, que es la de una recta.

Su posición cambia según cómo estén las dos circunferencias: si se cortan, pasa por los dos puntos comunes; si se tocan, es la tangente común en el punto de contacto; si están separadas, queda entre ellas sin tocar a ninguna.

El **centro radical** de tres circunferencias con los centros no alineados es el punto en que se cortan los tres ejes radicales tomados de dos en dos. Tiene la misma potencia respecto de las tres, y los tres ejes concurren siempre.

Si esa potencia común es positiva, los tres segmentos de tangente desde el centro radical miden lo mismo. Y esa medida es el radio de la circunferencia que corta a las tres formando ángulo recto.

▪ Dos circunferencias con el mismo centro no tienen eje radical: sus potencias se diferencian siempre en la misma cantidad y nunca llegan a coincidir.

- 5** Dos circunferencias tienen los centros en $O_1(0, 0)$ y $O_2(100, 0)$, con radios de **30 mm** y **50 mm**. Calcula: (a) a qué distancia de O_1 corta el eje radical a la recta de los centros; (b) la potencia de ese punto respecto de cada una; (c) cuánto mide desde él el segmento de tangente.

Solución

(a) El punto buscado tiene abscisa x y la misma potencia respecto de las dos: $x^2 - 900 = (x - 100)^2 - 2.500$. Desarrollando la derecha queda $x^2 - 200x + 10.000 - 2.500$. Y el término de segundo grado desaparece a ambos lados.

Queda $-900 = -200x + 7.500$, es decir $200x = 8.400$ y $x = \mathbf{42 \text{ mm}}$. El eje radical es la perpendicular a la recta de los centros por ese punto.

(b) Respecto de la primera: $42^2 - 30^2 = 1.764 - 900 = \mathbf{864 \text{ mm}^2}$. Respecto de la segunda, la distancia al centro es $100 - 42 = 58 \text{ mm}$. Y $58^2 - 50^2 = 3.364 - 2.500 = \mathbf{864 \text{ mm}^2}$ también.

(c) Ese valor es positivo. Así que el punto está fuera de las dos y el segmento de tangente mide $\sqrt{864} = \sqrt{(144 \cdot 6)} = \mathbf{12\sqrt{6} \text{ mm}}$, entre **29,39 y 29,40 mm**: $29,39^2 = 863,7721$ se queda corto y $29,40^2 = 864,36$ se pasa.

Para corregirte, comprueba que el eje radical cae donde tiene que caer: aquí las dos circunferencias están separadas. Así que ha de quedar entre ellas y fuera de las dos. Los 42 mm pasan de los 30 del primer radio. Y los 58 pasan de los 50 del segundo.

- 6** Tres circunferencias tienen los centros en $O_1(0, 0)$, $O_2(100, 0)$ y $O_3(0, 60)$, con radios de **30 mm**, **50 mm** y **30 mm**. Halla: (a) el centro radical; (b) su potencia respecto de las tres; (c) el radio de la circunferencia con centro en él que corta a las tres perpendicularmente.

Solución

(a) El eje radical de la primera y la segunda da la abscisa: $x^2 - 900 = (x - 100)^2 - 2.500$ lleva a $200x = 8.400$ y $x = 42 \text{ mm}$.

El de la primera y la tercera da la ordenada: $y^2 - 900 = (y - 60)^2 - 900$, que se reduce a $0 = -120y + 3.600$ y deja $y = 30 \text{ mm}$. El centro radical está en **(42, 30)**.

(b) Respecto de la primera: $42^2 + 30^2 - 30^2 = \mathbf{1.764 \text{ mm}^2}$. Respecto de la segunda: $(42 - 100)^2 + 30^2 - 50^2 = 3.364 + 900 - 2.500 = \mathbf{1.764 \text{ mm}^2}$. Respecto de la tercera: $42^2 + (30 - 60)^2 - 30^2 = 1.764 +$

$$900 - 900 = 1.764 \text{ mm}^2.$$

(c) Esa potencia común es el cuadrado del segmento de tangente. Así que desde el centro radical las tres tangentes miden $\sqrt{1.764} = 42 \text{ mm}$ y la circunferencia de ese radio corta a las tres formando ángulo recto.

Para corregirte, calcula el tercer eje radical, el de la segunda y la tercera. Y comprueba que también pasa por (42, 30). Si los tres no se cortan en el mismo punto, hay un error: los tres ejes radicales de tres circunferencias siempre concurren.

7

Dos circunferencias tienen los centros en $O_1(0, 0)$ y $O_2(39, 0)$, con radios de **25 mm** y **40 mm**. Calcula: (a) a qué distancia de O_1 está el eje radical; (b) en qué puntos se cortan las dos circunferencias; (c) cuánto mide la cuerda común.

Solución

(a) Igualando las dos potencias: $x^2 - 625 = (x - 39)^2 - 1.600$; o sea, $-625 = -78x + 1.521 - 1.600$. Queda $78x = 546$ y $x = 7 \text{ mm}$.

(b) Los puntos comunes están sobre esa recta. Así que tienen abscisa 7. Llevando ese valor a la primera: $49 + y^2 = 625$, de donde $y^2 = 576 \text{ mm}^2$ e $y = \pm 24 \text{ mm}$. Los puntos son **(7, 24)** y **(7, -24)**.

(c) Los dos están en la misma vertical, uno a cada lado. Así que la cuerda mide $24 + 24 = 48 \text{ mm}$.

Cuando dos circunferencias se cortan, su eje radical es justamente la recta de los dos puntos comunes: la potencia de cualquiera de ellos vale cero respecto de las dos. Y cero es cero en los dos casos.

Para corregirte, mete los puntos en la segunda circunferencia: $(7 - 39)^2 + 24^2 = 1.024 + 576 = 1.600 \text{ mm}^2$, que es 40^2 . Si no cuadra, el eje radical está mal situado.

La inversión y sus elementos dobles

Lo que hay que saber

Una **inversión** queda fijada por dos cosas: un punto O , llamado centro, y un número k , llamado razón de inversión. Dos puntos son inversos cuando están alineados con O y el producto de sus distancias a O vale k .

Si la **razón de inversión** es positiva, los dos puntos caen en la misma semirrecta desde O ; si es negativa, en semirrectas opuestas. El número es el mismo en valor absoluto. Así que *el lado hay que anotarlo aparte*.

Con razón positiva existe una **circunferencia de puntos dobles**, de centro O y de radio la raíz de la razón: cada uno de sus puntos es inverso de sí mismo.

Las transformaciones que hace: una recta que no pasa por O se convierte en una circunferencia que sí pasa por O , y al revés; una circunferencia que no pasa por O se convierte en otra circunferencia.

Por eso es la herramienta clásica de las tangencias: convierte un caso difícil en otro más sencillo ya resuelto, se resuelve allí y se deshace la transformación.

▲ La inversión no aparece con ese nombre en el real decreto de enseñanzas mínimas, que en este bloque habla de «aplicaciones en tangencias». Entra aquí porque es el método con el que los libros de segundo las resuelven. Pero conviene saber que no es una cita literal del currículo.

8

Una inversión tiene el centro en O y la razón **$k = 900 \text{ mm}^2$** . Calcula: (a) cuánto mide OA' si $OA = 60 \text{ mm}$; (b) cuánto mide OB' si $OB = 20 \text{ mm}$; (c) qué radio tiene la circunferencia de puntos dobles.

Solución

(a) La condición de la inversión es que el producto de las dos distancias valga la razón: $60 \cdot OA' = 900 \text{ mm}^2$, de donde $OA' = 900 \div 60 = 15 \text{ mm}$.

(b) Del mismo modo, $OB' = 900 \div 20 = 45 \text{ mm}$.

(c) Un punto es doble cuando coincide con su inverso; o sea, cuando su distancia al centro cumple $d \cdot d = 900 \text{ mm}^2$. Entonces $d = \sqrt{900} = 30 \text{ mm}$: los puntos dobles forman alrededor de O una circunferencia cuyo radio mide 30 mm.

Mira cómo se cruzan: A estaba fuera de esa circunferencia (60 pasa de 30) y su inverso quedó dentro (15 no llega a 30); B estaba dentro y su inverso salió fuera. Con razón positiva, la inversión siempre cambia el dentro por el fuera.

Para corregirte, multiplica cada pareja: $60 \cdot 15 = 900$ y $20 \cdot 45 = 900$. Los dos productos tienen que dar la razón, sin excepción.

9

Una inversión tiene el centro en O y la razón $k = -600 \text{ mm}^2$. Calcula: (a) dónde queda el inverso de un punto A con $OA = 40 \text{ mm}$; (b) el de un punto C con $OC = 25 \text{ mm}$; (c) si esta inversión tiene puntos dobles.

Solución

(a) Con la razón negativa el producto de las distancias sigue valiendo 600 mm^2 en valor absoluto. Pero el inverso se pone en la semirrecta contraria. Así que $OA' = 600 \div 40 = 15 \text{ mm}$, medidos al otro lado de O.

(b) $OC' = 600 \div 25 = 24 \text{ mm}$, también al otro lado.

(c) Un punto doble tendría que cumplir $d \cdot d = -600 \text{ mm}^2$, y ningún cuadrado es negativo. Así que **no hay puntos dobles**: con razón negativa esa circunferencia no existe.

▲ El número por sí solo no distingue los dos casos: 600 y -600 dan las mismas distancias, 15 mm y 24 mm. Lo único que cambia es *de qué lado* se ponen. Y eso no lo delata la medida.

Para corregirte, comprueba las dos parejas: $40 \cdot 15 = 600$ y $25 \cdot 24 = 600$. Y anota el lado aparte, porque la cuenta no lo lleva dentro.

10

El radio de una circunferencia mide **15 mm** y su centro cae a **25 mm** de O. Otra tiene el radio de **24 mm** y su centro a **40 mm** de O, en la misma semirrecta. Halla: (a) la potencia de O respecto de la primera; (b) la razón de inversión de centro O que lleva la primera a la segunda; (c) compruébalo con los dos puntos de la primera alineados con O y con su centro.

Solución

(a) La potencia vale $25^2 - 15^2 = 625 - 225 = 400 \text{ mm}^2$. Como es positiva, O queda fuera de la primera circunferencia.

(b) Las dos circunferencias son una la ampliación de la otra desde O: los radios están en la proporción $24 \div 15 = 8/5$ y las distancias de los centros, en $40 \div 25 = 8/5$ también. La razón de inversión es esa proporción multiplicada por la potencia: $(8/5) \cdot 400 = 640 \text{ mm}^2$.

(c) Los dos puntos de la primera que están alineados con O y con su centro distan de O $25 - 15 = 10 \text{ mm}$ y $25 + 15 = 40 \text{ mm}$.

Sus inversos están a $640 \div 10 = 64 \text{ mm}$ y a $640 \div 40 = 16 \text{ mm}$. Y la segunda circunferencia llega, sobre esa misma recta, hasta $40 + 24 = 64 \text{ mm}$ y hasta $40 - 24 = 16 \text{ mm}$. Coinciden. Así que la razón es la correcta.

Para corregirte, prueba con la razón cambiada: si tomaras $5/8$ en vez de $8/5$, la razón saldría 250 mm^2 y los inversos caerían a 25 mm y a 6,25 mm, que no son puntos de la segunda.

Tangencias resueltas con la potencia y con los lugares de centros

Lo que hay que saber

Toda circunferencia **tangente** a una recta tiene el centro en una paralela a esa recta, a una distancia igual a su radio; y el **punto de tangencia** cae donde la perpendicular bajada desde ese centro toca a la recta.

Toda circunferencia tangente a otra tiene el centro a una distancia del centro de la otra igual a la **suma** de los dos radios, si el contacto es exterior, o a su **diferencia**, si es interior. El contacto cae siempre sobre el segmento que va de un centro al otro, o sobre su prolongación.

Si una circunferencia pasa por dos puntos dados, su centro cae forzosamente en la mediatriz de esos dos puntos. Cruzando dos de tales condiciones salen los centros posibles. Y el número de cruces es el número de soluciones: dos, una o ninguna.

Cuando se busca una circunferencia que pase por dos puntos dados y toque a una recta, el punto donde la recta de los dos puntos corta a la recta dada tiene la misma potencia respecto de todas las soluciones. Y de ahí sale el punto de contacto.

La longitud de una **tangente común** a dos circunferencias sale de un triángulo rectángulo cuya hipotenusa es la distancia entre los centros: el otro cateto vale la resta de los dos radios cuando la tangente es exterior, y vale su suma cuando es interior.

▪ Que una circunferencia pase por los puntos dados no basta para darla por buena: hay que comprobar además la condición de tangencia. Y con frecuencia hay más de una solución que cumple las dos.

11

La recta r es el eje de abscisas. Los puntos $A(12, 16)$ y $B(27, 36)$ están alineados con el origen. Halla: (a) la potencia del origen respecto de cualquier circunferencia que pase por A y por B ; (b) los puntos de r donde una de esas circunferencias puede tocar a la recta; (c) el radio de la que toca a r en el punto de abscisa positiva.

Solución

(a) El origen está en la recta AB . Así que su potencia respecto de cualquier circunferencia que pase por A y por B vale el producto de las dos distancias. $OA = \sqrt{144 + 256} = \sqrt{400} = 20$ mm y $OB = \sqrt{729 + 1.296} = \sqrt{2.025} = 45$ mm, luego la potencia vale $20 \cdot 45 = 900$ mm².

(b) Si la circunferencia toca a r en un punto T , ese contacto es el caso límite de la secante. Y entonces la potencia del origen vale $OT \cdot OT$. De 900 mm² sale $OT = 30$ mm. Y como el origen está en r , hay dos posibilidades: **(30, 0)** y **(-30, 0)**. Hay **dos** soluciones.

(c) Con $T(30, 0)$, el centro está en la perpendicular a r por T ; o sea, en la vertical de abscisa 30, y su ordenada k es también el radio. Igualando la distancia al punto A con el radio: $(30 - 12)^2 + (k - 16)^2 = k^2$, que da $324 + 256 = 32k$.

De ahí $580 = 32k$ y $k = 18,125$ mm, que es el radio pedido.

Para corregirte, repite la cuenta con B en lugar de con A : $(30 - 27)^2 + (k - 36)^2 = k^2$ da $9 + 1.296 = 72k$; o sea, $1.305 = 72k$ y otra vez $k = 18,125$ mm. Si los dos puntos no dan el mismo centro, el punto de contacto está mal.

12

Una recta r y un punto T sobre ella. Se busca la circunferencia que toca a r justo en T y que además pasa por P , situado a **40 mm** de T en la dirección de r y a **20 mm** de r . Tomando T como origen y r como eje de abscisas, P está en $(40, 20)$. Halla: (a) dónde está el centro; (b) el radio; (c) comprueba el resultado.

Solución

(a) Tocar a r en T obliga al centro a estar en la perpendicular a r por T , que aquí es el eje de ordenadas. El centro es, por tanto, un punto **(0, k)**, y esa misma k es el radio, porque la distancia del centro a r se mide en vertical.

(b) El centro ha de equidistar de T y de P : $k^2 = 40^2 + (k - 20)^2$. Desarrollando, $k^2 = 1.600 + k^2 - 40k +$

400, los k^2 se van y queda $40k = 2.000$.

De ahí $k = 50$ mm: el centro está en (0, 50) y el radio mide 50 mm.

(c) La distancia del centro a P vale $\sqrt{(40^2 + 30^2)} = \sqrt{(1.600 + 900)} = \sqrt{2.500} = 50$ mm, igual al radio. Y la distancia del centro a r vale 50 mm también, con el pie justo en T.

Para corregirte, mira que el radio sea mayor que la distancia de P a la recta: P está a 20 mm de r y el radio mide 50 mm. Así que P queda dentro del círculo. Si te saliera un radio menor que 20 mm, la circunferencia no podría pasar por P.

13

Dos circunferencias de radios **40 mm** y **15 mm** tienen los centros separados **65 mm**. Calcula: (a) su posición relativa; (b) la longitud de la tangente exterior común; (c) la de la tangente interior común.

Solución

(a) Los dos radios suman $40 + 15 = 55$ mm, y sus centros quedan más lejos, a 65 mm. Así que cada una queda **fuera** de la otra y no se tocan.

(b) Para la tangente exterior, el triángulo rectángulo tiene por hipotenusa la distancia entre centros y por catetos la tangente y la *diferencia* de radios: $65^2 - (40 - 15)^2 = 4.225 - 625 = 3.600$ mm², de donde la tangente mide **60 mm**.

(c) En la interior, el cateto que cambia vale lo que *suman* ambos radios: $4.225 - 55^2 = 4.225 - 3.025 = 1.200$ mm². Y la tangente mide $\sqrt{1.200} = 20\sqrt{3}$ mm, entre **34,641 mm** y **34,642 mm**: $34,641^2 = 1.199,998881$ se queda corto y $34,642^2 = 1.200,068164$ se pasa.

Para corregirte, mira el orden de los dos resultados: la tangente interior siempre sale más corta que la exterior, porque se le resta un cateto mayor. Aquí 34,641 es menor que 60. Así que el orden es el correcto.

La elipse: focos, ejes y excentricidad

Lo que hay que saber

Una **elipse** reúne todos los puntos cuya suma de distancias a dos puntos fijos, los **focos**, se mantiene constante. Esa suma fija es el **eje mayor**. Y cada una de las dos distancias se llama **radio vector**.

El **eje menor** es perpendicular al mayor y pasa por el centro. Los tres semiejes, con la semidistancia focal, forman un triángulo rectángulo en el que el semieje mayor es la hipotenusa.

La **excentricidad** es la semidistancia focal dividida entre el semieje mayor. No lleva unidad y en la elipse está siempre entre 0 y 1: cerca de 0 la curva es casi una circunferencia y cerca de 1 es muy alargada.

Cada foco tiene su **directriz**, una recta perpendicular al eje mayor situada fuera de la curva. Para cualquier punto de la elipse, el radio vector dividido entre la distancia a esa directriz da siempre la excentricidad: es una segunda manera de definir la curva.

▲ Cuando un resultado lleva una raíz y hay que escribirlo en decimales, lo seguro es multiplicar por sí mismos los dos extremos propuestos y ver si el radicando cae entre ambos. Dos valores distintos pueden coincidir hasta la cuarta cifra decimal y parecer uno solo si se redondean antes de compararlos.

14

Una elipse tiene el eje mayor de **100 mm** y el eje menor de **60 mm**. Calcula: (a) los dos semiejes; (b) la distancia entre los focos; (c) la excentricidad.

Solución

(a) Los semiejes son la mitad de cada eje: el mayor mide **50 mm** y el menor, **30 mm**.

(b) El semieje mayor, el semieje menor y la semidistancia focal forman un triángulo rectángulo en el que el semieje mayor es la hipotenusa. Así que el cuadrado de la semidistancia focal vale $2.500 - 900 = 1.600$ mm², de donde mide **40 mm** y los focos están separados **80 mm**.

(c) La excentricidad es la semidistancia focal dividida entre el semieje mayor: $40 \div 50 = 4/5 = 0,8$. No lleva unidad, porque es un cociente entre dos longitudes.

Un valor de 0,8 queda cerca de 1. Así que esta elipse es bastante alargada. Cuanto más se acerque la excentricidad a cero, más se parecerá a una circunferencia.

Para corregirte, deshaz la cuenta: $40^2 + 30^2 = 1.600 + 900 = 2.500 \text{ mm}^2$, que es 50^2 . Si no te cuadra, seguramente has puesto la semidistancia focal como hipotenusa.

15

En una elipse de semieje mayor **50 mm** centrada en el origen, los focos están en $(-40, 0)$ y $(40, 0)$. El punto $P(30, 24)$ pertenece a la curva. Calcula: (a) su distancia al foco de la izquierda; (b) su distancia al de la derecha; (c) la suma de las dos.

Solución

(a) De $(-40, 0)$ a $(30, 24)$ hay 70 mm en horizontal y 24 mm en vertical. El cuadrado de la distancia vale $70^2 + 24^2 = 4.900 + 576 = 5.476 \text{ mm}^2$. Y su raíz es **74 mm**.

(b) De $(40, 0)$ a $(30, 24)$ hay 10 mm en horizontal y 24 mm en vertical: $10^2 + 24^2 = 100 + 576 = 676 \text{ mm}^2$, cuya raíz es **26 mm**.

(c) La suma vale $74 + 26 = 100 \text{ mm}$, que es justo el eje mayor. Eso es la definición de la elipse: la suma de los dos radios vectores es la misma en todos sus puntos.

Para corregirte, hay un atajo que da el segundo radio vector sin raíces: vale el semieje mayor menos la excentricidad por la abscisa, es decir $50 - 0,8 \cdot 30 = 26 \text{ mm}$. Coincide. Así que el punto y las cuentas están bien.

16

Una elipse tiene la excentricidad **0,6** y el eje mayor de **80 mm**. Calcula: (a) la distancia entre los focos; (b) el eje menor; (c) la distancia de un foco al extremo del eje menor.

Solución

El semieje mayor mide $80 \div 2 = 40 \text{ mm}$.

(a) La semidistancia focal es la excentricidad por el semieje mayor: $0,6 \cdot 40 = 24 \text{ mm}$. Así que los focos están separados $2 \cdot 24 = 48 \text{ mm}$.

(b) El cuadrado del semieje menor vale $1.600 - 576 = 1.024 \text{ mm}^2$, de donde mide 32 mm y el eje menor entero, $2 \cdot 32 = 64 \text{ mm}$.

(c) Ese extremo está a 32 mm del centro en vertical y el foco, a 24 mm en horizontal: la distancia al cuadrado vale $576 + 1.024 = 1.600 \text{ mm}^2$; o sea, **40 mm**, que es el semieje mayor.

Para corregirte, usa ese último resultado como control: la distancia de un foco a cualquiera de los dos extremos del eje menor tiene que dar siempre el semieje mayor; porque la suma de los dos radios vectores en ese punto es el eje mayor y los dos valen lo mismo.

17

En la elipse de semiejes **50 mm** y **30 mm**, con los focos a **40 mm** del centro, (a) ¿a qué distancia del centro está la directriz de un foco? (b) Comprueba la excentricidad con el punto $P(30, 24)$, cuyo radio vector al foco de la derecha mide **26 mm**. (c) ¿Qué distancia hay entre las dos directrices?

Solución

(a) La directriz está a una distancia del centro igual al cuadrado del semieje mayor dividido entre la semidistancia focal: $2.500 \div 40 = 62,5 \text{ mm}$. Queda fuera de la curva, porque 62,5 pasa de los 50 mm del semieje.

(b) La distancia de P a la directriz de la derecha vale $62,5 - 30 = 32,5 \text{ mm}$. Dividiendo el radio vector entre ella: $26 \div 32,5 = 0,8$, que es la excentricidad.

Eso es una segunda manera de definir la elipse: el cociente entre la distancia a un foco y la distancia

a su directriz vale lo mismo en todos los puntos de la curva. Y ese valor es la excentricidad.

(c) Las dos directrices están a un lado y a otro del centro. Así que la distancia entre ellas es $2 \cdot 62,5 = 125 \text{ mm}$.

Para corregirte, prueba el cociente en otro punto de la curva, por ejemplo en el extremo del eje mayor: su radio vector al foco de la derecha mide $50 - 40 = 10 \text{ mm}$ y su distancia a esa directriz, $62,5 - 50 = 12,5 \text{ mm}$. El cociente $10 \div 12,5$ vuelve a dar 0,8.

La hipérbola: focos, asíntotas y excentricidad

Lo que hay que saber

Una **hipérbola** reúne todos los puntos cuya diferencia de distancias a los dos focos, tomada en valor absoluto, es siempre la misma. Esa diferencia constante es el **eje real**, y la curva tiene dos ramas separadas.

Aquí el triángulo rectángulo se monta al revés que en la elipse: la hipotenusa es la semidistancia focal. Y los catetos son el semieje real y el semieje del **eje imaginario**, que no corta a la curva pero fija su abertura. La excentricidad vuelve a ser la semidistancia focal dividida entre el semieje real. Pero ahora sale siempre mayor que 1, porque una hipotenusa es mayor que cualquiera de sus catetos.

Las **asíntotas** pasan por el centro y son las diagonales del rectángulo que tiene por lados los dos ejes. Sus pendientes valen el semieje imaginario dividido entre el real, una con cada signo. La curva se les acerca sin llegar a tocarlas.

Cuando los dos semiejes miden lo mismo, la hipérbola se llama **equilátera**, y el rectángulo que forman sus ejes pasa a ser un cuadrado.

▪ Confundir el papel de los ejes es el error más frecuente: en la elipse se resta para obtener la semidistancia focal y en la hipérbola se suma. El control rápido es mirar la excentricidad, que ha de quedar por debajo de 1 en un caso y por encima en el otro.

- 18** Una hipérbola tiene el eje real de **60 mm** y el eje imaginario de **80 mm**. Calcula: (a) la distancia focal; (b) la excentricidad; (c) la pendiente de las asíntotas.

Solución

Los semiejes miden 30 mm el real y 40 mm el imaginario.

(a) En la hipérbola la semidistancia focal es la hipotenusa, no un cateto: su cuadrado vale $900 + 1.600 = 2.500 \text{ mm}^2$, de donde mide 50 mm y la distancia focal entera, **100 mm**.

(b) La excentricidad es $50 \div 30 = 5/3$, un valor que está entre **1,6666** y **1,6667**. En la hipérbola siempre pasa de 1, porque la hipotenusa es mayor que cualquiera de los catetos.

(c) Las asíntotas son las diagonales del rectángulo que tiene por lados los dos ejes. Así que su pendiente es el semieje imaginario partido por el real: $40 \div 30 = 4/3$ una de ellas y **$-4/3$** la otra.

Para corregirte, compara con la elipse: allí el semieje mayor era la hipotenusa y la excentricidad quedaba por debajo de 1; aquí la hipotenusa es la semidistancia focal y el resultado se pasa de 1. Si te sale menor que 1 en una hipérbola, has sumado donde tocaba restar.

- 19** Una hipérbola tiene el eje real de **80 mm** y el eje imaginario de **60 mm**, con los focos sobre el eje real. Se toma el punto P de la curva situado en la perpendicular al eje real por uno de los focos. Calcula: (a) la distancia de P a ese foco; (b) la distancia de P al otro foco; (c) la diferencia entre las dos.

Solución

Los semiejes miden 40 mm y 30 mm. Y la semidistancia focal cumple $1.600 + 900 = 2.500 \text{ mm}^2$; o sea, 50 mm.

(a) La relación entre las coordenadas de la hipérbola dice que el cuadrado de la abscisa dividido entre el cuadrado del semieje real menos el cuadrado de la ordenada dividido entre el del semieje imaginario vale 1. Con la abscisa igual a 50: $50^2 \div 40^2 = 2.500 \div 1.600 = 25/16$.

Restando 1 queda $9/16$, y multiplicando por el cuadrado del semieje imaginario: $900 \cdot 9/16 = 506,25 \text{ mm}^2$. La ordenada es la raíz de eso, **22,5 mm**. Y esa es la distancia de P al foco, porque están en la misma vertical.

(b) Del otro foco a P hay 100 mm en horizontal y 22,5 mm en vertical: $100^2 + 22,5^2 = 10.000 + 506,25 = 10.506,25 \text{ mm}^2$, cuya raíz es **102,5 mm**.

(c) La diferencia vale $102,5 - 22,5 = 80 \text{ mm}$, que es el eje real. Esa es la definición de la hipérbola: la diferencia de los dos radios vectores, en valor absoluto, es la misma en todos sus puntos.

Para corregirte, comprueba la raíz de (b) sin calculadora: $102,5^2 = 10.506,25$, que es el número de partida.

20

Una hipérbola equilátera tiene el eje real de **80 mm**. Calcula: (a) la distancia focal; (b) la excentricidad acotada entre dos valores de cuatro decimales; (c) el ángulo que forman sus asíntotas.

Solución

Equilátera quiere decir que los dos semiejes miden lo mismo. Así que el imaginario también mide 40 mm.

(a) El cuadrado de la semidistancia focal vale $1.600 + 1.600 = 3.200 \text{ mm}^2$, de donde mide $40\sqrt{2} \text{ mm}$ y la distancia focal entera es **$80\sqrt{2} \text{ mm}$** , entre **113,13 y 113,14 mm**: $113,13^2 = 12.798,3969$ se queda corto y $113,14^2 = 12.800,6596$ se pasa.

(b) La excentricidad es $40\sqrt{2} \div 40 = \sqrt{2}$. Y sale ese valor sea cual sea el tamaño: toda hipérbola equilátera tiene la misma excentricidad.

Está entre **1,4142 y 1,4143**, porque $1,4142^2 = 1,99996164$ no llega a 2 y $1,4143^2 = 2,00024449$ se pasa.

(c) Las pendientes de las asíntotas valen $40 \div 40 = 1$ y -1 . Así que una sube tanto como la otra baja y el ángulo que forman es **recto, de 90°** .

Para corregirte, no te fíes de comparar decimales ya redondeados: hay que elevar al cuadrado y ver si el 2 queda entre los dos resultados, que es lo que se ha hecho arriba.

La parábola: foco, directriz y parámetro

Lo que hay que saber

Una **parábola** reúne todos los puntos que equidistan de dos cosas: un punto fijo, el foco, y una recta fija, la directriz. Solo tiene una rama y carece de centro.

El **parámetro** es la distancia del foco a la directriz. El **vértice** es el punto de la curva que cae sobre el eje, entre el foco y la directriz.

Con el vértice en el origen y el eje sobre el eje de abscisas, la relación entre las coordenadas de sus puntos es que el cuadrado de la ordenada vale el doble del parámetro multiplicado por la abscisa.

La excentricidad de la parábola vale exactamente 1: es el caso de frontera entre la elipse, que la tiene menor, y la hipérbola, que la tiene mayor. Las tres curvas responden a la misma definición con foco y directriz. Y lo único que cambia es ese número.

La cuerda que pasa por el foco perpendicularmente al eje tiene nombre propio: se llama **lado recto**, y es la referencia habitual para comparar dos parábolas.

▪ La parábola no tiene ni centro ni asíntotas ni segundo foco. Aplicarle una fórmula de la elipse o de la hipérbola no da un resultado malo: da un resultado que no significa nada.

- 21** Una parábola tiene el foco a **30 mm** de la directriz. Un punto P de la curva está a **50 mm** del foco. Calcula: (a) a qué distancia del vértice está el foco; (b) la abscisa de P medida desde el vértice; (c) su ordenada.

Solución

El parámetro es la distancia del foco a la directriz. Así que aquí vale 30 mm.

(a) El vértice está en el punto medio entre el foco y la directriz; o sea, a $30 \div 2 = 15$ mm de cada uno.

(b) Por la definición, P está a 50 mm del foco y también a 50 mm de la directriz. Como el vértice está a 15 mm de la directriz, la abscisa de P contada desde el vértice vale $50 - 15 = 35$ mm.

(c) Con el vértice en el origen, el cuadrado de la ordenada vale el doble del parámetro por la abscisa: $2 \cdot 30 \cdot 35 = 2.100$ mm². La ordenada es $\sqrt{2.100} = 10\sqrt{21}$ mm, entre **45,82 y 45,83 mm**: $45,82^2 = 2.099,4724$ se queda corto y $45,83^2 = 2.100,3889$ se pasa.

Para corregirte, vuelve a la definición con el punto ya situado: de la directriz al punto hay $15 + 35 = 50$ mm. Y eso es lo que valía el radio vector. Si ambas distancias no coinciden, el punto no está en la curva.

- 22** En una parábola de parámetro **30 mm**, (a) ¿a qué distancia del eje está el punto de la curva que se encuentra en la perpendicular al eje por el foco? (b) ¿Cuánto mide la cuerda completa que pasa por el foco perpendicularmente al eje? (c) Comprueba el resultado con la directriz.

Solución

(a) Ese punto tiene la misma abscisa que el foco; o sea, 15 mm contados desde el vértice. El cuadrado de su ordenada vale $2 \cdot 30 \cdot 15 = 900$ mm², de donde la ordenada mide **30 mm**.

Sale el mismo número que el parámetro, y no es casualidad: esa distancia vale siempre lo que el parámetro, cualquiera que sea la parábola.

(b) La curva es simétrica respecto del eje. Así que hay otro punto igual al otro lado y la cuerda mide **60 mm**. Esa cuerda es el lado recto.

(c) El punto está a 15 mm del vértice y el vértice a 15 mm de la directriz. Así que de la directriz al punto hay $15 + 15 = 30$ mm, lo mismo que del punto al foco. Se cumple la definición.

Para corregirte, fíjate en que el lado recto sale siempre el doble del parámetro. Si te da otra cosa, has confundido el parámetro con la distancia del vértice al foco, que es su mitad.

Una parábola tiene el vértice en el origen y el eje sobre el eje de abscisas. Y pasa por el punto P(20, 40). Calcula: (a) el parámetro; (b) dónde están el foco y la directriz; (c) comprueba las dos distancias de P.

Solución

(a) El cuadrado de la ordenada vale el doble del parámetro por la abscisa: 40^2 es igual al doble del parámetro por 20. Como $40^2 = 1.600 \text{ mm}^2$, el doble del parámetro vale $1.600 \div 20 = 80 \text{ mm}$ y el parámetro, **40 mm**.

(b) El foco está a la mitad del parámetro del vértice, es decir a $40 \div 2 = 20 \text{ mm}$, en **(20, 0)**. La directriz es la recta vertical de abscisa **-20**, a la misma distancia por el otro lado.

(c) La distancia de P(20, 40) al foco (20, 0) es **40 mm**, porque están en la misma vertical. Y de P a la directriz hay $20 + 20 = 40 \text{ mm}$. Las dos coinciden. Así que P está en la curva.

Para corregirte, comprueba la relación en otro punto: con abscisa 5 mm, el cuadrado de la ordenada vale $80 \cdot 5 = 400 \text{ mm}^2$ y la ordenada, 20 mm. Su distancia al foco es $\sqrt{(225 + 400)} = 25 \text{ mm}$, y a la directriz, $5 + 20 = 25 \text{ mm}$.

Rectas tangentes a una cónica y circunferencias focales

Lo que hay que saber

La **circunferencia principal** tiene el centro de la cónica y por radio el semieje mayor, o el real en la hipérbola. Por ella pasan los pies de las perpendiculares que bajan desde un foco hasta cada una de las tangentes.

La **circunferencia focal** de un foco tiene ese foco por centro y por radio el eje mayor entero, o el real en la hipérbola. Es el doble de grande que la principal.

La propiedad que da el método: el simétrico de un foco respecto de cualquier tangente cae siempre sobre la circunferencia focal del otro foco. Y cualquier punto de esa circunferencia focal vale para construir una tangente, sin más datos que los dos focos.

En un punto de la curva, la tangente parte en dos partes iguales el ángulo que forman los dos radios vectores prolongados en la elipse, y el que forman sin prolongar en la hipérbola. De ahí vienen las propiedades de reflexión que tienen las antenas y los espejos.

El número de tangentes que salen de un punto se cuenta cortando la circunferencia focal de un foco con la circunferencia de centro ese punto y radio su distancia al otro foco: dos cortes, uno o ninguno según dónde esté el punto.

En la parábola la circunferencia focal se convierte en la propia directriz, y la principal pasa a ser la tangente en el vértice. Todo el método sigue valiendo cambiando una cosa por la otra.

En la elipse de semiejes **50 mm** y **30 mm**, con los focos a **40 mm** del centro, se toma el punto P(30, 24) de la curva, cuyos radios vectores miden **74 mm** y **26 mm**. Halla: (a) el radio de la circunferencia focal; (b) a qué distancia del foco de la izquierda queda el simétrico del foco de la derecha respecto de la tangente en P; (c) qué relación guarda la tangente con ese segmento.

Solución

(a) La circunferencia focal de un foco tiene ese foco por centro y el eje mayor entero por radio: $2 \cdot 50 = 100 \text{ mm}$.

(b) Al reflejar el foco de la derecha en la tangente, su imagen cae en la prolongación del radio vector que va del foco de la izquierda a P, y a la misma distancia de P que el foco reflejado; o sea, 26 mm más allá. En total, desde el foco de la izquierda hay $74 + 26 = 100 \text{ mm}$.

Ese número es el radio de la circunferencia focal. Así que el punto reflejado cae sobre ella. Pasa con cualquier tangente de la curva, y de ahí sale el método para trazarlas.

(c) La tangente deja el foco de la derecha y su imagen a la misma distancia y en perpendicular al segmento que los une: la tangente es la **mediatriz** de ese segmento.

Para corregirte, repite el razonamiento con el otro foco: el simétrico del foco de la izquierda respecto de la misma tangente tiene que quedar a $26 + 74 = 100$ mm del foco de la derecha, que es el radio de su circunferencia focal.

25

En la misma elipse, de semieje mayor **50 mm** y focos a **40 mm** del centro, se toma el punto $Q(80, 0)$. Calcula: (a) su distancia a cada foco; (b) cuántas tangentes a la curva pasan por Q ; (c) cuántas pasarían por el punto $(50, 0)$.

Solución

(a) Q está en el eje mayor. Así que las distancias se restan y se suman directamente: al foco de la izquierda hay $80 + 40 = 120$ mm y al de la derecha, $80 - 40 = 40$ mm.

(b) Los puntos de contacto se buscan cortando la circunferencia focal del foco de la izquierda, de radio 100 mm, con la circunferencia de centro Q y radio su distancia al otro foco, 40 mm. Los centros de esas dos están a 120 mm.

Dos circunferencias tienen dos cortes cuando lo que separa sus centros cae entre la resta y la suma de sus radios. Aquí $100 - 40 = 60$ y $100 + 40 = 140$, y 120 queda en medio. Así que hay dos cortes y, por tanto, **dos tangentes**.

(c) El punto $(50, 0)$ es el extremo del eje mayor y está *en* la curva: sus distancias a los focos valen $50 + 40 = 90$ mm y $50 - 40 = 10$ mm. Ahora $100 - 10 = 90$, justo la distancia entre centros. Así que las dos circunferencias se tocan en un solo punto y sale **una sola tangente**.

Para corregirte, prueba con un punto de dentro, por ejemplo el centro: sus distancias a los focos valen 40 mm y 40 mm. Y $100 - 40 = 60$ es mayor que 40. Así que no hay cortes y no sale ninguna tangente. Los tres casos encajan.

26

Una parábola de parámetro **40 mm** tiene el vértice en el origen, el foco en $(20, 0)$ y la directriz en la recta de abscisa -20 . El punto $P(20, 40)$ está en la curva. Halla: (a) las coordenadas del pie de la perpendicular que baja de P a la directriz; (b) por qué punto del eje pasa la tangente en P ; (c) comprueba que esa tangente es una mediatriz.

Solución

(a) La directriz es vertical. Así que el pie tiene la abscisa de la directriz y la ordenada de P : **$(-20, 40)$** .

(b) En la parábola la directriz hace el papel de circunferencia focal. Y la tangente es la mediatriz que separa el foco de ese pie. El punto intermedio entre ambos es $(0, 20)$. Y el punto del eje que cumple la condición es **$(-20, 0)$** : de ahí al foco hay $20 + 20 = 40$ mm y al pie, también 40 mm.

(c) P está a 40 mm del foco y a 40 mm del pie, porque esa es la definición de la parábola. Así que también pertenece a la mediatriz. Los tres puntos $(-20, 0)$, $(0, 20)$ y $(20, 40)$ están alineados: de uno al siguiente se avanza 20 mm en horizontal y 20 mm en vertical.

El punto por el que la tangente corta al eje queda a la misma distancia del vértice que P , pero al otro lado: 20 mm. Esa es la regla práctica para trazar la tangente en cualquier punto de una parábola.

Para corregirte, mide la distancia del punto medio $(0, 20)$ al foco y al pie: $\sqrt{(400 + 400)}$ en los dos casos. Si no salieran iguales, el punto medio estaría mal.

Lo que hay que saber

▪ **Este tema no trae ejercicios: solo su teoría.** Una homología se resuelve con regla y compás encima del papel. Y cualquier enunciado obligaría a señalar un dibujo que este archivo no admite. Sí cabe, en cambio, describirla paso a paso, y es lo que viene aquí.

Qué es una homología. Es una correspondencia entre dos formas planas con dos condiciones: cada punto y su homólogo están alineados con un punto fijo, el **centro de homología**; y cada recta y su homóloga se cortan sobre una recta fija, el **eje de homología**. Los puntos del eje son dobles: coinciden con su homólogo.

Qué hace falta para fijarla. El centro, el eje y un par de puntos homólogos. Con esos tres datos queda determinado el homólogo de cualquier otro punto.

Paso a paso: el homólogo de un punto B. Se parte del centro O, del eje e y de una pareja conocida A y A'. (1) Se une A con B y se prolonga hasta cortar al eje; ese corte, llámese M, es un punto doble. (2) Se une M con A': esa es la recta homóloga de la recta AB. (3) Se une O con B y se prolonga. (4) El punto donde se cruzan las rectas de los pasos 2 y 3 es B', el homólogo buscado.

Las rectas límite. Hay dos, las dos paralelas al eje. La primera reúne los puntos cuyos homólogos se van al infinito; la segunda, los que son homólogos de los del infinito. La distancia del centro a una de ellas es la misma que hay del eje a la otra. Y son las que explican que una circunferencia pueda convertirse en una elipse, en una parábola o en una hipérbola según dónde corte a la primera recta límite: en ningún punto, en uno o en dos.

Qué es una afinidad. Es el caso particular en que el centro se va al infinito. Entonces las rectas que unen cada punto con su homólogo no concurren: son todas paralelas entre sí, y esa dirección común se llama dirección de afinidad. El eje se conserva igual, con sus puntos dobles. Para fijar una afinidad hacen falta el eje, la dirección y un par de puntos homólogos.

Paso a paso: la elipse como afín de una circunferencia. Sea una elipse de semiejes 50 mm y 30 mm. (1) Se toma como eje de afinidad el eje mayor y como dirección de afinidad la perpendicular a él. (2) Con centro en el centro de la elipse se dibuja la circunferencia de radio el semieje mayor, 50 mm. (3) La razón de afinidad es el semieje menor dividido entre el mayor; o sea, $30 \div 50 = 3/5$. (4) Para cada punto de la circunferencia se baja la perpendicular al eje y se acorta esa distancia en esa proporción: el punto que queda pertenece a la elipse. Con doce o dieciséis puntos repartidos, la curva sale suficientemente definida.

▲ El sentido práctico de todo esto: la homología y la afinidad permiten dibujar en verdadera forma algo que en el dibujo aparece deformado, y al revés. Es la herramienta que une este bloque con los sistemas de representación. Y en particular con la perspectiva cónica, donde una forma del suelo y su imagen en el cuadro son homólogas.

Verdadera magnitud de segmentos y ángulos en el sistema diédrico

Lo que hay que saber

Cada punto queda fijado por tres números: la **abscisa**, medida a lo largo de la línea de tierra; el **alejamiento**, que lo separa del plano vertical; y la **cota**, que lo separa del plano horizontal. La proyección horizontal toma los dos primeros y la vertical, el primero y el tercero.

Una proyección solo da la medida real de un segmento cuando el segmento es paralelo al plano sobre el que se proyecta. En cualquier otro caso sale acortada, y hay que reconstruir la medida.

El método más corto es el **triángulo de rebatimiento**: sobre la proyección horizontal se levanta, por uno de sus extremos y en perpendicular, la diferencia de cotas de los dos puntos. La hipotenusa que sale es la verdadera magnitud. Y el ángulo que forma con la proyección es el que el segmento forma con el plano horizontal.

El mismo triángulo se puede montar sobre la proyección vertical llevando la diferencia de alejamientos. Y entonces el ángulo que aparece es el que el segmento forma con el plano vertical. Los dos caminos han de dar la misma verdadera magnitud.

Una **recta de perfil** tiene sus dos proyecciones sobre una misma perpendicular a la línea de tierra. Ahí las dos proyecciones se confunden en una sola línea y ninguna medida se lee directamente.

▪ La distancia mínima entre un punto y una recta, o entre dos rectas, se mide por un segmento perpendicular. Y ese segmento tampoco se lee en cualquier proyección: solo donde aparece en verdadera magnitud.

- 27** El punto A tiene abscisa **0**, alejamiento **10 mm** y cota **20 mm**. El punto B tiene abscisa **36 mm**, alejamiento **58 mm** y cota **100 mm**. Calcula: (a) la longitud de la proyección horizontal de AB; (b) la verdadera magnitud del segmento; (c) el seno del ángulo que AB forma con el plano horizontal.

Solución

(a) La proyección horizontal conserva la abscisa y el alejamiento. De A a B la abscisa crece $36 - 0 = 36$ mm y el alejamiento, $58 - 10 = 48$ mm. La longitud al cuadrado vale $36^2 + 48^2 = 1.296 + 2.304 = 3.600$ mm², de donde mide **60 mm**.

(b) La medida real sale como hipotenusa de un triángulo rectángulo con catetos esa proyección y la diferencia de cotas, que vale $100 - 20 = 80$ mm: $3.600 + 6.400 = 10.000$ mm², y la raíz da **100 mm**.

(c) El seno del ángulo con el plano horizontal es el cateto opuesto partido por la hipotenusa; o sea, la diferencia de cotas entre la verdadera magnitud: $80 \div 100 = \mathbf{0,8}$.

Para corregirte, suma los cuadrados de las tres diferencias de golpe: $1.296 + 2.304 + 6.400 = 10.000$ mm², que es 100^2 . El camino en dos pasos y el de un solo paso han de coincidir en el mismo valor.

- 28** Los puntos C y D tienen la misma cota, **30 mm**. C tiene abscisa **0** y alejamiento **15 mm**; D tiene abscisa **48 mm** y alejamiento **51 mm**. Calcula: (a) la verdadera magnitud de CD; (b) la longitud de su proyección vertical; (c) el seno del ángulo que CD forma con el plano vertical.

Solución

(a) Al tener los dos la misma cota, el segmento es paralelo al plano horizontal. Y todo lo que es paralelo a un plano se proyecta sobre él con su medida real. Así que basta la proyección horizontal: $48^2 + 36^2 = 2.304 + 1.296 = 3.600$ mm²; o sea, **60 mm**.

(b) La proyección vertical conserva la abscisa y la cota. Como la cota no cambia, esa proyección es un segmento paralelo a la línea de tierra que mide lo que la diferencia de abscisas: **48 mm**.

(c) El seno del ángulo con el plano vertical es la diferencia de alejamientos partida por la verdadera magnitud: $36 \div 60 = \mathbf{0,6}$.

Para corregirte, comprueba que los dos senos encajan: el de este ángulo vale 0,6 y el que el mismo segmento forma con el plano horizontal vale 0, porque no cambia de cota. Un segmento paralelo a un plano forma con él un ángulo nulo.

29

Los puntos E y F tienen la misma abscisa. E tiene alejamiento **15 mm** y cota **70 mm**; F tiene alejamiento **55 mm** y cota **28 mm**. Calcula: (a) qué miden las dos proyecciones; (b) la verdadera magnitud de EF; (c) qué proyección hace falta para leer esa medida directamente.

Solución

(a) Al compartir la abscisa, las dos proyecciones caen sobre una misma perpendicular a la línea de tierra. La horizontal mide la diferencia de alejamientos, $55 - 15 = \mathbf{40\text{ mm}}$. La vertical mide la diferencia de cotas, $70 - 28 = \mathbf{42\text{ mm}}$. Ninguna de las dos es la medida real.

(b) Esos dos números son los catetos de un triángulo rectángulo cuya hipotenusa es la medida real: $40^2 + 42^2 = 1.600 + 1.764 = 3.364\text{ mm}^2$, y la raíz da **58 mm**.

Se llega al mismo sitio porque la diferencia de abscisas vale cero: el término que correspondería a la tercera dirección no suma nada.

(c) Hace falta la **proyección sobre el plano de perfil**, que es el tercer plano, perpendicular a los otros dos. Ahí el segmento aparece con su medida real, porque es paralelo a ese plano.

Para corregirte, mira el orden de los tres números: 40 y 42 son los catetos y 58 la hipotenusa. De modo que la medida real ha de superar a cualquiera de las dos proyecciones. Si te sale menor, has restado en vez de sumar.

30

Una recta vertical pasa por el punto de abscisa **70 mm** y alejamiento **65 mm**. El punto G tiene abscisa **30 mm** y alejamiento **35 mm**. Calcula: (a) cómo se ve esa recta en la proyección horizontal; (b) la distancia mínima de G a la recta; (c) por qué esa distancia se lee sin más operaciones.

Solución

(a) Una recta vertical es perpendicular al plano horizontal. Así que todos sus puntos comparten abscisa y alejamiento: su **proyección horizontal se reduce a un punto**.

(b) El segmento más corto de G a la recta es perpendicular a ella. Y como la recta es vertical, ese segmento es horizontal. Su longitud es lo que hay entre ambas proyecciones horizontales: $70 - 30 = 40\text{ mm}$ de abscisa y $65 - 35 = 30\text{ mm}$ de alejamiento. Así que $40^2 + 30^2 = 1.600 + 900 = 2.500\text{ mm}^2$ y la distancia mide **50 mm**.

(c) Porque ese segmento es paralelo al plano horizontal y se proyecta sobre él con su medida real. No hace falta ningún triángulo auxiliar: el número se toma tal cual de la proyección.

Para corregirte, comprueba que la cota de G no interviene: da igual a qué altura esté; porque la recta sube indefinidamente y el punto más próximo siempre queda a su misma cota.

Giros y cambios de plano, por coordenadas

Lo que hay que saber

Los tres métodos del sistema diédrico —el giro, el cambio de plano y el abatimiento— buscan lo mismo: colocar la forma en una posición favorable, en la que la medida que interesa se lea directamente. Aquí van los dos primeros.

Un **cambio de plano** vertical sustituye el plano vertical por otro, también perpendicular al horizontal. El objeto no se mueve y el plano horizontal sigue donde estaba; los alejamientos se vuelven a medir a la línea de tierra nueva.

Un cambio de plano horizontal hace lo contrario: el que se sustituye es el plano horizontal, y las cotas se vuelven a medir al plano nuevo.

Se pueden encadenar, pero de uno en uno, rehaciendo las dos proyecciones antes del siguiente. Con uno se puede dejar una recta paralela a un plano de proyección; con dos, perpendicular a él.

Un **giro** de eje vertical mueve el objeto y deja los planos quietos. Cada punto describe una circunferencia horizontal centrada en el eje, y el radio de esa circunferencia es la distancia de su proyección horizontal a la del eje.

Un giro de eje perpendicular al plano vertical funciona igual cambiando los papeles: lo que se conserva entonces es el alejamiento.

- 31** El punto A tiene alejamiento **45 mm** y cota **30 mm**. Se aplica un cambio de plano vertical cuya nueva línea de tierra queda a **18 mm** de la antigua, del mismo lado que A. Calcula: (a) la cota de A en el sistema nuevo; (b) su nuevo alejamiento; (c) cuál sería el nuevo alejamiento si la línea de tierra se hubiera puesto a **60 mm**.

Solución

(a) Un cambio de plano vertical sustituye el plano vertical por otro. Pero deja el plano horizontal donde estaba. Las cotas se miden al plano horizontal. Así que no cambian: **30 mm**.

(b) El alejamiento se mide desde la línea de tierra hasta la proyección horizontal del punto. Con la línea nueva a 18 mm, queda $45 - 18 = \mathbf{27\ mm}$.

(c) Con la línea a 60 mm, el punto queda del otro lado, porque 60 pasa de los 45 mm de A. La distancia vale $60 - 45 = \mathbf{15\ mm}$, y hay que contarla hacia el lado contrario: A pasa a estar detrás de la nueva línea de tierra.

Para corregirte, comprueba que la distancia de A al plano horizontal es la misma en los tres casos, 30 mm. Si una de las cotas te ha cambiado, has movido el plano que no era.

- 32** El punto B tiene alejamiento **40 mm** y cota **55 mm**. Se le aplica primero un cambio de plano vertical con la línea de tierra nueva a **16 mm**. Después se le aplica un cambio de plano horizontal con el plano nuevo a la cota **22 mm**. Calcula: (a) el alejamiento y la cota después del primer cambio; (b) los dos valores después del segundo; (c) di qué dato ha tocado cada cambio.

Solución

(a) El cambio de plano vertical deja la cota en **55 mm** y lleva el alejamiento a $40 - 16 = \mathbf{24\ mm}$.

(b) El cambio de plano horizontal hace lo contrario: deja el alejamiento en **24 mm** y lleva la cota a $55 - 22 = \mathbf{33\ mm}$.

(c) El primero tocó solo el **alejamiento** y el segundo, solo la **cota**. Nunca se mueven los dos planos a la vez: por eso los cambios se encadenan de uno en uno, rehaciendo las dos proyecciones antes de dar el paso siguiente.

Ese es justamente el motivo de encadenarlos. Con un solo cambio se puede dejar una recta paralela a un plano de proyección; con dos, perpendicular a él, que es la posición en la que se resuelven las

distancias de un tirón.

Para corregirte, recorre al revés los dos cambios: $24 + 16 = 40$ mm de alejamiento y $33 + 22 = 55$ mm de cota, que son los datos de partida.

33

Un eje vertical pasa por el punto de abscisa **20 mm** y alejamiento **30 mm**. El punto C tiene abscisa **56 mm**, alejamiento **78 mm** y cota **25 mm**. Calcula: (a) el radio del giro; (b) la cota de C después de girar; (c) la abscisa que tendrá C cuando el giro lo deje con el mismo alejamiento que el eje, por el lado de las abscisas mayores.

Solución

(a) Al girar alrededor de un eje vertical, cada punto describe una circunferencia horizontal centrada en el eje. El radio es lo que separa a las dos proyecciones horizontales: la abscisa se diferencia en $56 - 20 = 36$ mm y el alejamiento en $78 - 30 = 48$ mm. Así que $36^2 + 48^2 = 1.296 + 2.304 = 3.600$ mm² y el radio mide **60 mm**.

(b) Un giro de eje vertical mueve el punto dentro de un plano horizontal. Así que la cota no cambia: sigue siendo **25 mm**.

(c) Si C acaba con el mismo alejamiento que el eje, su proyección horizontal queda en la misma paralela a la línea de tierra que la del eje, a 60 mm de distancia. Por el lado de las abscisas mayores, eso da $20 + 60 =$ **80 mm**.

Para corregirte, comprueba el radio en la posición final: de (80, 30) a (20, 30) hay 60 mm justos. Y el alejamiento no interviene porque los dos coinciden. Si el radio hubiera cambiado, el movimiento no sería un giro.

Abatimientos: la verdadera forma de una cara plana

Lo que hay que saber

▪ **Este tema no trae ejercicios: solo su teoría.** Un abatimiento se ejecuta con regla y compás. Y el enunciado obligaría a remitir a una lámina que este archivo no admite. Va contado abajo paso a paso y con sus medidas.

Qué es abatir. Es girar el plano que contiene una forma alrededor de una de sus trazas hasta dejarlo tumbado sobre el plano de proyección. La traza alrededor de la que se gira se llama **charnela**. Y sus puntos no se mueven. Una vez tumbada, la forma aparece con su verdadera magnitud y se puede medir y dibujar como si estuviera sobre la mesa.

Paso a paso: abatir un punto A de un plano oblicuo sobre el plano horizontal. (1) Se toma la proyección horizontal de A. (2) Por ella se levanta la perpendicular a la charnela y se marca el pie F, que es donde esa perpendicular corta a la charnela. (3) Se mide la distancia del pie a la proyección horizontal de A. (4) Se monta un triángulo rectángulo con esa distancia de cateto y la cota de A de otro cateto. (5) La hipotenusa de ese triángulo es la distancia del pie al punto abatido. (6) Esa medida se lleva sobre la perpendicular del paso 2, a partir del pie y alejándose de la charnela.

Un ejemplo con números. Si el pie está a 40 mm de la proyección horizontal del punto y el punto tiene la cota 30 mm, el triángulo tiene catetos 40 y 30. Así que la hipotenusa mide 50 mm: el punto abatido queda a 50 mm del pie, sobre la perpendicular a la charnela.

Desabatir. El camino de vuelta se recorre igual, al revés: desde el punto abatido se vuelve al pie, se recupera la distancia del cateto y se sitúa la proyección horizontal. Todo lo que se dibuje sobre la forma abatida se puede devolver al dibujo punto a punto.

La relación entre lo abatido y su proyección es una afinidad, con la charnela por eje. Eso ahorra trabajo: basta abatir dos o tres puntos y el resto se obtiene por afinidad, en lugar de repetir el triángulo para cada uno.

Para qué sirve. Para dibujar en verdadera magnitud una forma contenida en un plano oblicuo. Por ejemplo, para situar un pentágono regular de 30 mm de lado sobre ese plano: se abate el plano, se dibuja el pentágono con su medida real y se desabaten sus cinco vértices uno a uno.

▲ La trampa que más cuesta: la cota se lleva perpendicular a la *charnela*, no perpendicular a la línea de tierra. Si la charnela es oblicua respecto de la línea de tierra, las dos direcciones no coinciden y el punto abatido sale desplazado sin que nada lo avise.

▲ Antes de abatir conviene elegir la traza: la que deje la forma más cerca de la charnela da triángulos más pequeños y un dibujo más limpio.

Secciones planas de cuerpos y su verdadera magnitud

Lo que hay que saber

▪ **Este tema no trae ejercicios: solo su teoría.** Una sección se resuelve arista por arista encima del dibujo. Y sin ese dibujo delante ningún enunciado se sostiene. Va contado abajo el procedimiento completo, paso a paso.

Qué se busca. Un cuerpo y un plano que lo atraviesa; la sección es el polígono o la curva que el plano deja marcada en la superficie del cuerpo. En un poliedro sale un polígono con tantos lados como caras atraviese el plano.

Paso a paso en un prisma o una pirámide. (1) Se toma una arista. (2) Se hace pasar por ella un plano auxiliar que sea proyectante, es decir, perpendicular a uno de los planos de proyección: así su traza coincide con la proyección de la arista y no hay que buscarla. (3) Se halla la recta común al plano auxiliar y al plano de corte. (4) Donde esa recta cruza a la arista está el punto de la sección. (5) Se repite con todas las aristas que el plano atraviesa y se unen los puntos siguiendo el orden de las caras, nunca al azar.

La verdadera magnitud de la sección. El polígono obtenido aparece deformado en las dos proyecciones, porque está en un plano oblicuo. Para verlo con su forma real se abate el plano de corte sobre uno de los de proyección, o se hace un cambio de plano que deje el plano de corte paralelo a uno de ellos.

Cuerpos de revolución. En un cilindro recto la sección por un plano oblicuo es una elipse. En un cono la sección es una cónica. Y cuál sea depende del ángulo del plano con el eje: elipse si corta a todas las generatrices, parábola si es paralelo a una sola e hipérbola si es paralelo a dos. Ahí se cierra el círculo con el bloque de las cónicas.

Poliedros regulares. El tetraedro, el hexaedro y el octaedro son los tres que pide el curso. Del hexaedro conviene tener dos medidas en la cabeza: con arista de 40 mm, la diagonal de una cara mide $40\sqrt{2}$ mm, entre 56,56 y 56,57 mm. Y la diagonal que atraviesa el cuerpo mide $40\sqrt{3}$ mm, entre 69,28 y 69,29 mm.

Paso a paso: el desarrollo de una superficie. Desarrollar es extender la superficie sobre un plano sin estirarla ni romperla. (1) En un prisma recto se pone la base estirada en línea recta, con sus lados en verdadera magnitud seguidos uno tras otro. Y sobre cada uno se levanta la altura correspondiente. (2) En un cono recto el desarrollo es un sector circular cuyo radio es la generatriz y cuyo arco mide lo que la circunferencia de la base; el ángulo de ese sector vale 360° multiplicado por el radio de la base y dividido entre la generatriz. Con un radio de base de 30 mm y una generatriz de 50 mm sale $360^\circ \cdot 30 \div 50 = 216^\circ$.

▲ No toda superficie se puede desarrollar: los conos y los cilindros sí, y también los poliedros. Pero la esfera no. Los mapas del mundo son la prueba de ello. Por eso ninguno conserva a la vez las formas y las superficies.

El sistema axonométrico ortogonal: coeficientes y escalas

Lo que hay que saber

En la **axonometría ortogonal** los tres ejes del espacio se proyectan sobre un plano perpendicular a la dirección de proyección. Ninguno de los tres queda paralelo a ese plano. Así que los tres salen acortados, cada uno en su medida.

Ese acortamiento es el **coeficiente de reducción** del eje: el cociente entre lo que mide un segmento en el dibujo y lo que mide en la realidad, tomado sobre ese eje o sobre una paralela a él.

Los tres coeficientes no son independientes. La suma de sus cuadrados vale siempre 2. De modo que fijados dos, el tercero queda determinado. Como consecuencia, ninguno puede pasar de 1.

Según cómo sean entre sí, el sistema recibe tres nombres: **isometría** si los tres coinciden —y entonces cada uno vale la raíz de dos tercios—, **dimetría** si coinciden dos, y **trimetría** si los tres son distintos.

En la práctica se dibuja muchas veces sin reducir, con coeficientes cómodos y redondos. El dibujo sale entonces más grande que la pieza. Pero como todos los ejes crecen en la misma proporción, las formas no se deforman. La **escala axonométrica** es la regla graduada que lleva el coeficiente ya incorporado.

▪ El coeficiente se aplica únicamente a las medidas tomadas sobre los ejes o sobre paralelas a ellos. Una medida en cualquier otra dirección, como la diagonal de una cara, no se reduce con ninguno de los tres: hay que obtenerla a partir de sus componentes.

- 34** En la dimetría normalizada dos de los coeficientes de reducción son iguales y el tercero es la mitad de ellos. Sabiendo que sus tres cuadrados suman **2**, calcula (a) el valor de los dos coeficientes iguales; (b) el del tercero; (c) comprueba la suma.

Solución

(a) Llamando u a los dos coeficientes iguales, el tercero vale $u \div 2$ y la condición se escribe: u al cuadrado, más u al cuadrado, más la cuarta parte de u al cuadrado, igual a 2. Eso son nueve cuartos de u al cuadrado.

De ahí, el cuadrado de u vale $2 \cdot 4 \div 9 = 8/9$. Y u es la raíz de $8/9$, es decir $2\sqrt{2} \div 3$. Ese número está entre **0,9428 y 0,9429**: $0,9428^2 = 0,88887184$ no llega a $8/9$ y $0,9429^2 = 0,88906041$ se pasa.

(b) El tercero es la mitad: $\sqrt{2} \div 3$, entre **0,4714 y 0,4715**, porque $0,4714^2 = 0,22221796$ no llega a $2/9$ y $0,4715^2 = 0,22231225$ se pasa.

(c) Los cuadrados valen $8/9$, $8/9$ y $2/9$. Y su suma es $8/9 + 8/9 + 2/9 = 18/9 = 2$.

Para corregirte, compara los dos coeficientes entre sí: el mayor ha de ser exactamente el doble del menor. Y en efecto $2\sqrt{2} \div 3$ es el doble de $\sqrt{2} \div 3$. Si esa proporción no sale, el planteamiento estaba mal.

- 35** En una trimetría, dos de los coeficientes de reducción valen **0,8 y 0,9**. Calcula: (a) el cuadrado del tercero; (b) su valor exacto, acotado con cuatro decimales; (c) comprueba que los tres cuadrados suman lo que deben.

Solución

(a) Los tres cuadrados suman 2. De modo que el del tercero vale $2 - 0,64 - 0,81 = 0,55$.

(b) Ese cuadrado es la fracción $55/100$, y su raíz vale $\sqrt{55} \div 10$, porque 55 no tiene ningún factor al cuadrado y 100 sí. El valor queda entre **0,7416 y 0,7417**: $0,7416^2 = 0,54997056$ no llega a 0,55 y $0,7417^2 = 0,55011889$ se pasa.

(c) Sumando: $0,64 + 0,81 + 0,55 = 2$, como tenía que salir.

Los tres coeficientes son distintos, que es lo que define la trimetría. En la dimetría dos coinciden y en la isometría coinciden los tres.

Para corregirte, mira que ningún coeficiente pase de 1: son reducciones. Así que un valor mayor que

la unidad significaría que el eje sale más largo que la pieza. Y eso no ocurre en la axonometría ortogonal.

36

Una arista de **90 mm** se dibuja en la dimetría normalizada, cuyos coeficientes son $2\sqrt{2} \div 3$, $2\sqrt{2} \div 3$ y $\sqrt{2} \div 3$. Calcula: (a) su longitud sobre uno de los dos ejes de coeficiente mayor; (b) su longitud sobre el eje de coeficiente menor; (c) cuántas veces mayor sale el dibujo si se usan los coeficientes prácticos 1, 1 y $1/2$.

Solución

(a) Se multiplica la medida real por el coeficiente: $90 \cdot 2\sqrt{2} \div 3 = 60\sqrt{2} \text{ mm}$. Ese valor está entre **84,85 y 84,86 mm**, porque $84,85^2 = 7.199,5225$ no llega a 7.200 y $84,86^2 = 7.201,2196$ se pasa.

(b) Con el coeficiente menor: $90 \cdot \sqrt{2} \div 3 = 30\sqrt{2} \text{ mm}$, entre **42,426 mm y 42,427 mm**: $42,426^2 = 1.799,965476$ no llega a 1.800 y $42,427^2 = 1.800,050329$ se pasa.

(c) Con el coeficiente práctico 1 la arista se dibujaría con sus 90 mm. La proporción entre ese dibujo y el reducido es $90 \div 60\sqrt{2} = 3 \div 2\sqrt{2} = 3\sqrt{2} \div 4$, entre **1,0606 y 1,0607**: $1,0606^2 = 1,12487236$ no llega a $9/8$ y $1,0607^2 = 1,12508449$ se pasa.

Para corregirte, comprueba que la misma proporción sale en el otro eje: $45 \div 30\sqrt{2}$ vuelve a dar $3 \div 2\sqrt{2}$. Si no coincidiera, el dibujo estaría deformado y no sería una dimetría.

37

Una pieza mide **60 mm** en la dirección del eje de coeficiente menor de la dimetría normalizada, que vale $\sqrt{2} \div 3$. Calcula: (a) cuánto mide en el dibujo; (b) cuánto mediría si además el conjunto se redujera a la mitad; (c) si esa segunda reducción amplía o reduce.

Solución

(a) Se multiplica por el coeficiente: $60 \cdot \sqrt{2} \div 3 = 20\sqrt{2} \text{ mm}$, entre **28,28 y 28,29 mm**: $28,28^2 = 799,7584$ no llega a 800 y $28,29^2 = 800,3241$ se pasa.

(b) Reducir a la mitad es multiplicar otra vez, ahora por $1/2$: $20\sqrt{2} \div 2 = 10\sqrt{2} \text{ mm}$, entre **14,14 y 14,15 mm**, porque $14,14^2 = 199,9396$ no llega a 200 y $14,15^2 = 200,2225$ se pasa.

(c) La razón vale $1/2$, y eso no alcanza la unidad. Así que **reduce**. Conviene hacer esa comprobación antes de ponerse a multiplicar: ver si la razón supera la unidad o se queda por debajo.

▲ Las dos operaciones son distintas y conviene no mezclarlas: el coeficiente corrige el acortamiento que produce la proyección. Y la reducción posterior es una decisión de tamaño del dibujo. Las dos multiplican, pero por motivos diferentes.

Para corregirte, deshaz las dos: $10\sqrt{2} \cdot 2 = 20\sqrt{2}$. Y $20\sqrt{2}$ multiplicado por $3 \div \sqrt{2}$ devuelve 60 mm, que es la medida de partida.

La perspectiva cónica: representación de sólidos

Lo que hay que saber

▪ **Este tema no trae ejercicios: solo su teoría.** Una perspectiva cónica se levanta con regla encima del papel. Y el enunciado obligaría a remitir a un trazado que este archivo no admite. Va contado abajo paso a paso y con sus medidas.

Los elementos. El observador se reduce a un punto, el punto de vista. Entre él y el objeto se pone un plano transparente, el plano del cuadro, donde queda el dibujo. El suelo es el plano geometral. La **línea del horizonte** se sitúa en el cuadro, a la misma altura que el punto de vista; el **punto principal** marca dónde cae la perpendicular bajada desde el punto de vista hasta el cuadro, y queda sobre el horizonte; y los **puntos de distancia** están sobre el horizonte, a un lado y a otro del principal, a una distancia igual a la que hay del punto de vista al cuadro.

Dos disposiciones. Si el objeto tiene una cara paralela al cuadro, la perspectiva es frontal y solo hay un punto de fuga, el principal. Si está girado, es oblicua y aparecen dos puntos de fuga sobre el horizonte, uno por cada dirección horizontal.

Paso a paso: un cuadrado del suelo en perspectiva frontal. Sea un cuadrado de 40 mm de lado apoyado en el suelo con un lado en el cuadro; el punto de vista está a 90 mm del cuadro y a 60 mm de altura. (1) Se dibuja en el cuadro la línea de tierra y, a 60 mm por encima, la línea del horizonte. (2) Se marca el punto principal sobre el horizonte y, a 90 mm a cada lado, los dos puntos de distancia. (3) El lado que está en el cuadro se dibuja con su medida real, 40 mm, sobre la línea de tierra. (4) Desde sus dos extremos se tiran rectas al punto principal: son las dos aristas que se alejan. (5) Desde uno de los extremos se tira una recta a un punto de distancia; donde corta a la recta del paso 4 está el vértice del fondo. (6) Por ese vértice se traza la paralela a la línea de tierra y queda cerrado el cuadrado.

Por qué funciona el punto de distancia. La recta que va a un punto de distancia es la perspectiva de una diagonal a 45° del suelo. Y esa diagonal lleva la profundidad medida sobre la línea de tierra hasta donde le corresponde. Es la manera de trasladar al dibujo una medida de profundidad sin más cuentas.

Paso a paso: un prisma a partir de sus vistas. (1) Se sitúa la planta del objeto respecto del cuadro y del punto de vista. (2) Se lleva cada vértice de la planta al suelo en perspectiva por el método anterior. (3) Las alturas se miden en verdadera magnitud sobre una vertical que toque el cuadro, porque allí no hay reducción. (4) Esas alturas se trasladan a su sitio fugando hacia el punto de fuga que corresponda. (5) Se unen los vértices y se decide qué aristas quedan vistas y cuáles ocultas.

▪ La trampa habitual: lo que fuga son las rectas perpendiculares u oblicuas al cuadro. Las rectas paralelas al cuadro *no* fugan, se dibujan paralelas entre sí. Y las verticales siguen verticales mientras el cuadro esté vertical.

▲ Cuanto más lejos se ponga el punto de vista, más suave sale la perspectiva. Un punto de vista demasiado cerca produce ese aspecto forzado de una fotografía hecha con un objetivo muy abierto.

Cubiertas y perfiles de terreno en el sistema de planos acotados

Lo que hay que saber

El **sistema de planos acotados** necesita un único plano de proyección: cada punto se dibuja con su proyección horizontal y el número de su altura escrito al lado. Es el sistema de la topografía y de la obra civil, porque una sola vista lleva toda la información.

Un plano inclinado se representa por sus **curvas de nivel**, que en un plano son rectas paralelas y equidistantes: cada una agrupa los puntos de igual altura. Y la separación entre dos consecutivas depende de lo inclinado que esté.

Una **cubierta** es un conjunto de planos inclinados, los faldones, cada uno apoyado en un alero horizontal. Si dos faldones vecinos tienen la misma inclinación y sus aleros quedan a la misma altura, la recta en que se cortan se proyecta siguiendo la bisectriz del ángulo formado por ambos aleros.

Esas líneas tienen nombre propio: la más alta y horizontal es la **cumbrera**; las que bajan desde un vértice saliente son las **limatesas**; y las que bajan desde un vértice entrante, las limahoyas.

Un **perfil de terreno** se obtiene cortando el terreno por un plano vertical: se marcan los puntos en que ese plano cruza a cada curva de nivel y, en la vertical de cada uno, se lleva su altura a la escala elegida. Uniendo los puntos se dibuja la silueta del terreno.

▲ Entre dos curvas de nivel la altura se interpola suponiendo que la ladera sube de manera uniforme. Es una aproximación cómoda y casi siempre suficiente. Pero conviene saber que ningún terreno real cumple eso exactamente.

- 38** Una nave de **12 m** de anchura tiene los dos aleros a la misma altura, a la cota **5 m**. Sobre ellos apoya una cubierta a dos aguas con una pendiente del **50 %** en los dos faldones. Calcula: (a) la distancia horizontal del alero a la cumbrera; (b) la cota de la cumbrera; (c) la longitud del faldón en verdadera magnitud.

Solución

(a) Los dos faldones tienen la misma pendiente y arrancan de aleros que están a la misma altura. Así que se encuentran en el centro: $12 \div 2 = 6 \text{ m}$ desde cada alero.

(b) Una pendiente del 50 % quiere decir que por cada metro avanzado en horizontal se sube medio metro. En 6 m se suben $6 \cdot 0,50 = 3 \text{ m}$. Así que la cumbrera queda a la cota $5 + 3 = 8 \text{ m}$.

(c) El faldón es la hipotenusa de un triángulo de catetos 6 m en horizontal y 3 m en vertical: $6^2 + 3^2 = 36 + 9 = 45 \text{ m}^2$. Y la raíz vale **$3\sqrt{5} \text{ m}$** , entre **6,70 y 6,71 m**, porque $6,70^2 = 44,89$ no llega a 45 y $6,71^2 = 45,0241$ se pasa.

Para corregirte, comprueba que la longitud del faldón es mayor que los 6 m de su proyección horizontal y menor que la suma $6 + 3 = 9 \text{ m}$. Los 6,70 m cumplen las dos cosas.

- 39** Dos curvas de nivel consecutivas de un terreno, de cotas **40 m** y **45 m**, están separadas **20 m** en la proyección horizontal. Calcula: (a) la pendiente del tramo; (b) la cota de un punto situado a **8 m** de la primera, subiendo; (c) la distancia realmente recorrida entre las dos curvas.

Solución

(a) La pendiente es lo que se sube dividido entre lo que se avanza en horizontal: $5 \div 20 = 0,25$, es decir un **25 %**.

(b) Suponiendo que la ladera es plana en ese tramo, en 8 m se suben $8 \cdot 0,25 = 2 \text{ m}$. Así que el punto está a la cota $40 + 2 = 42 \text{ m}$.

(c) El recorrido real es la hipotenusa de un triángulo de catetos 20 m y 5 m: $20^2 + 5^2 = 400 + 25 = 425 \text{ m}^2$. Y la raíz vale **$5\sqrt{17} \text{ m}$** , entre **20,61 y 20,62 m**: $20,61^2 = 424,7721$ no llega a 425 y $20,62^2 = 425,1844$ se pasa.

▲ La interpolación del apartado (b) da un valor aproximado, no exacto: supone que entre dos curvas de nivel el terreno sube de manera uniforme. Y un terreno real casi nunca lo hace.

Para corregirte, mira que la distancia real supere a la horizontal en muy poco: aquí son 20,61 m frente a 20 m, porque el desnivel es pequeño comparado con el avance.

40

Un edificio rectangular de **16 × 10 m** tiene los cuatro aleros a la misma altura y una cubierta a cuatro aguas con la misma pendiente, del **40 %**, en los cuatro faldones. Calcula: (a) el ángulo que forman las limatesas con los aleros en la proyección horizontal; (b) la longitud de la cumbrera y a qué altura queda sobre el alero; (c) con cuántos milímetros se dibuja esa cumbrera sobre un plano levantado a 1:100, diciendo si esa escala reduce o amplía.

Solución

(a) Cuando dos faldones vecinos tienen la misma pendiente y sus aleros están a la misma altura, la recta en que se cortan se proyecta siguiendo la bisectriz de los dos aleros. Aquí los aleros son perpendiculares. Así que esa bisectriz forma **45°** con cada uno.

(b) Las cuatro limatesas avanzan hacia dentro a 45°. Así que desde cada lado corto entran $10 \div 2 = 5$ m. La cumbrera es lo que queda del lado largo: $16 - 5 - 5 = 6$ m.

Su altura sobre el alero es lo que se sube en esos 5 m con una pendiente del 40 %: $5 \cdot 0,40 = 2$ m.

(c) Seis metros son 6.000 mm, y a 1:100 esa cifra se divide entre 100: $6.000 \div 100 = 60$ mm. La razón vale 1/100 y no alcanza la unidad. De modo que la escala **reduce**.

Para corregirte, comprueba el reparto del lado largo: $5 + 6 + 5 = 16$ m. Si la suma no devuelve la medida del edificio, las limatesas están mal situadas.

Cortes, secciones y roturas en los planos de taller

Lo que hay que saber

▪ **Este tema no trae ejercicios: solo su teoría.** Un corte se entiende dibujándolo, y este archivo no admite ese dibujo. Sí cabe explicar con detalle cómo se ejecuta y cómo se rotula, que es justo lo que pregunta un examen escrito.

Qué es un corte. Se supone que un plano atraviesa la pieza y que se retira la parte que queda entre el plano y el observador. Se dibuja lo que queda: la superficie tocada por el plano y, además, todo lo que se ve detrás de ella. Sirve para enseñar el interior sin llenar el dibujo de líneas de trazos.

La diferencia con una sección. Una sección dibuja únicamente la superficie que el plano ha tocado, sin lo que queda detrás. Todo corte contiene una sección. Pero no al revés.

Paso a paso: cómo se indica. (1) En una de las vistas se marca por dónde pasa el plano con una línea de trazo y punto, fina en su recorrido y gruesa en los dos extremos. (2) En esos extremos se ponen dos flechas perpendiculares a la línea, que señalan hacia dónde mira el observador. (3) Junto a cada flecha se escribe la misma letra mayúscula. (4) La vista obtenida se titula con esas dos letras separadas por un guion.

Las clases de corte. Corte total, cuando el plano atraviesa la pieza entera; medio corte, en piezas simétricas, dibujando media vista normal y medio corte separados por el eje; corte parcial, limitado por una línea fina a mano alzada, para enseñar solo un detalle; y cortes por dos o más planos, paralelos entre sí o concurrentes en un eje.

El rayado. La superficie tocada por el plano se raya con líneas finas paralelas, inclinadas 45° respecto del contorno principal y separadas entre 1 y 3 mm según el tamaño de la pieza. Dos piezas contiguas de un conjunto se rayan en sentidos distintos, o con distinta separación, para que se distingan.

Lo que no se raya aunque el plano lo atraviese. Los nervios cortados a lo largo, los brazos de las poleas y los volantes, y los elementos macizos: tornillos, tuercas, arandelas, ejes, pasadores, chavetas y bolas de rodamiento. La razón es que rayarlos haría pensar que son huecos o que están seccionados de verdad.

La rotura. Sirve para acortar el dibujo de una pieza larga de sección constante, como un eje o un perfil. Se dibujan los dos extremos y se suprime el centro, indicando la interrupción con una línea fina a mano alzada, o bien en zigzag. ▲ La cota que se escribe es la medida entera real de la pieza, no la del dibujo acortado: la rotura cambia el dibujo, nunca la medida.

Acotación funcional y tolerancias

Lo que hay que saber

Acotar funcionalmente consiste en elegir las medidas necesarias para que la pieza cumpla su función, tomadas desde las superficies que de verdad importan, en vez de acotar por donde resulta cómodo dibujar. Las cotas se pueden repartir de tres maneras: en **serie**, encadenadas una detrás de otra; en **paralelo**, todas medidas desde un mismo origen; y de forma combinada. El reparto elegido decide qué errores se acumulan y cuáles no. Así que no es una cuestión de estética.

Ninguna pieza sale con la medida exacta. Por eso a la **cota nominal** se le añaden una desviación superior y otra inferior, que dan la medida máxima y la mínima admisibles. La **tolerancia** es la diferencia entre esas dos medidas límite, y siempre es un número positivo.

Cuando dos piezas encajan, el conjunto se llama **ajuste**. Y las dos se acotan con la misma cota nominal. El **juego** máximo se obtiene con el agujero en su medida mayor y el eje en la menor; el juego mínimo, al revés.

Con los dos juegos positivos el ajuste es móvil, y la pieza siempre gira o desliza; con los dos negativos es con aprieto, y hay que meterla a presión; y si uno sale positivo y el otro negativo, el ajuste es indeterminado y puede quedar de las dos maneras.

▪ Una cota repetida sobra y es peligrosa: si la pieza lleva las tres medidas de una cadena y además el total, las cuatro pueden contradecirse dentro de sus tolerancias y el taller no sabrá cuál respetar.

- 41** Una cota tiene el valor nominal **50 mm**, la desviación superior **+0,05 mm** y la inferior **-0,03 mm**. Calcula: (a) la medida máxima; (b) la mínima; (c) la tolerancia.

Solución

(a) La medida máxima es el valor nominal más la desviación superior: $50 + 0,05 = 50,05 \text{ mm}$.

(b) La mínima es el valor nominal más la desviación inferior, que aquí es negativa: $50 - 0,03 = 49,97 \text{ mm}$.

(c) La tolerancia es la diferencia entre las dos medidas límite: $50,05 - 49,97 = 0,08 \text{ mm}$.

Se llega al mismo número restando las dos desviaciones: $0,05 + 0,03 = 0,08 \text{ mm}$. Es un camino más corto y sirve de comprobación.

Para corregirte, mira que el valor nominal quede entre las dos medidas límite. Si una de las dos se te queda del mismo lado que la otra, has sumado la desviación negativa en vez de restarla.

- 42** Un agujero de **40 mm** nominales lleva las desviaciones **+0,08** y **0**. Y el eje que entra en él, de los mismos 40 mm nominales, lleva **-0,02** y **-0,06**. Calcula: (a) las cuatro medidas límite; (b) el juego máximo y el mínimo; (c) de qué clase es el ajuste.

Solución

(a) El agujero va de $40 + 0,08 = 40,08 \text{ mm}$ a $40 + 0 = 40,00 \text{ mm}$. El eje va de $40 - 0,02 = 39,98 \text{ mm}$ a $40 - 0,06 = 39,94 \text{ mm}$.

(b) El juego máximo se da con el agujero lo más grande posible y el eje lo más pequeño posible: $40,08 - 39,94 = 0,14 \text{ mm}$.

El juego mínimo es el caso contrario, agujero pequeño y eje grande: $40,00 - 39,98 = 0,02 \text{ mm}$.

(c) Los dos juegos salen positivos. Así que el eje siempre entra con holgura, por mal que caigan las dos piezas dentro de su tolerancia: es un **ajuste móvil**.

Para corregirte, comprueba que el juego máximo sale de sumar ambas tolerancias y el juego mínimo: la del agujero vale 0,08 mm, la del eje 0,04 mm. Y $0,08 + 0,04 = 0,12 \text{ mm}$. Y $0,08 - 0,06 = 0,02 \text{ mm}$.

Tres cotas puestas en cadena valen **20 mm**, **35 mm** y **25 mm**. Y cada una lleva una tolerancia de **$\pm 0,1$ mm**. Calcula: (a) la medida total; (b) entre qué valores puede quedar esa medida total; (c) cuánto valdría la tolerancia de la cota total si se acotara desde un origen común.

Solución

(a) Puestas en cadena, las tres se suman: $20 + 35 + 25 = \mathbf{80\text{ mm}}$.

(b) En el peor caso las tres se van al máximo y la medida total se pasa $0,1 + 0,1 + 0,1 = 0,3$ mm; en el otro peor caso se queda corta en la misma cantidad. La medida total va, por tanto, de **79,7 mm** a **80,3 mm**, un intervalo de **0,6 mm**.

- Eso es lo que se llama acumulación de tolerancias, y es la trampa de acotar en cadena: cada cota cumple lo suyo y aun así el conjunto se sale de lo previsto.

(c) Acotando desde un origen común, la medida total se mide directamente desde ese origen y no arrastra el error de las otras dos: su tolerancia sería la suya propia, **$\pm 0,1$ mm**, con un intervalo de 0,2 mm.

Para corregirte, compara los dos intervalos: 0,6 mm en cadena y 0,2 mm desde un origen común; o sea, el triple. Ahí está el motivo de acotar pensando en la función de cada medida y no en el orden en que resulta cómodo dibujar.
