

Ejercicios Resueltos Matemáticas 1 de Bachillerato 2026 / 2027

48 ejercicios con la solución explicada paso a paso, y la teoría de los 15 temas que trae esta selección.

Lo que vas a practicar

Números reales, valor absoluto y radicales · Escribir con intervalos lo que dice un valor absoluto, comparar raíces de índices distintos y racionalizar (**ejercicios 1, 2, 3**)

Logaritmos · Calcular logaritmos de cabeza, descomponer un logaritmo en sumas y resolver ecuaciones con incógnita en el exponente (**ejercicios 4, 5, 6**)

Inecuaciones y sistemas no lineales · Resolver una desigualdad de segundo grado, una con fracción y un sistema en el que una ecuación no es una recta (**ejercicios 7, 8, 9**)

Números complejos · Operar en forma binómica, dividir con el conjugado y resolver una ecuación que en 4º no tenía solución (**ejercicios 10, 11, 12**)

Trigonometría: radianes, cuadrantes e identidades · Pasar de grados a radianes, colocar un ángulo en su cuadrante y usar la identidad fundamental sin equivocarse de signo (**ejercicios 13, 14, 15, 16**)

Resolución de triángulos: teoremas del seno y del coseno · Calcular un lado o un ángulo cuando el triángulo no es rectángulo, y descubrir cuándo hay dos triángulos posibles (**ejercicios 17, 18, 19**)

Vectores en el plano · Operar con coordenadas, calcular módulos y usar el producto escalar para el ángulo y la perpendicularidad (**ejercicios 20, 21, 22**)

Geometría analítica: la recta en el plano · Escribir una recta de todas las formas, cruzarla con su perpendicular y decidir cómo están dos rectas entre sí (**ejercicios 23, 24, 25**)

Lugares geométricos y la circunferencia · Pasar de centro y radio a ecuación y al revés, detectar las ecuaciones que no son circunferencias y hallar una mediatriz (**ejercicios 26, 27, 28**)

Funciones: dominio, composición e inversa · Saber dónde existe una función, encadenar dos funciones en el orden correcto y deshacer una función (**ejercicios 29, 30, 31**)

Sucesiones y su límite · Decidir a qué número se acerca una sucesión, medir a partir de qué término se acerca lo suficiente y reconocer las que no tienen límite (**ejercicios 32, 33, 34**)

Límites de funciones e indeterminaciones · Salir de un 0/0 con factor común o con el conjugado, comparar grados en el infinito y calcular límites por cada lado (**ejercicios 35, 36, 37, 38**)

Continuidad y asíntotas · Pegar bien los dos trozos de una función, distinguir los tipos de discontinuidad y localizar las asíntotas (**ejercicios 39, 40, 41**)

La derivada: definición y recta tangente · Calcular una derivada con el límite que la define, escribir la

recta tangente y ver qué dice y qué no dice una derivada nula (**ejercicios 42, 43, 44, 45**)

Estadística de dos variables y probabilidad con recuento · Medir con un número si dos variables van juntas, ajustar las dos rectas de regresión y contar casos con combinaciones (**ejercicios 46, 47, 48**)

Material propio de solucionario.es. Los enunciados y las soluciones están escritos por nosotros. La versión al día, con más ejercicios y de todos los cursos, está siempre en:

solucionario.es

Qué entra aquí y qué no. En 1º de Bachillerato conviven **varias** asignaturas de matemáticas, y esta página cubre **Matemáticas I**, la de la modalidad de **Ciencias y Tecnología**. • **No está pensada para Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales I**, que es otra asignatura y no una versión más fácil de esta: quien la curse encontrará aquí vectores, geometría analítica, trigonometría y números complejos, que no son de su programa, y en cambio **no encontrará** la parte financiera —cuotas, tasas, intereses y préstamos— ni las distribuciones binomial y normal, que sí son suyas. Tampoco es la de la modalidad General, que se llama **Matemáticas Generales**. Entran los quince temas del cuadro: números reales y valor absoluto, logaritmos, inecuaciones y sistemas no lineales, números complejos, trigonometría con ángulos de cualquier cuadrante, resolución de triángulos con los teoremas del seno y del coseno, vectores, la recta en el plano, lugares geométricos y la circunferencia, dominio y composición de funciones, sucesiones y su límite, límites de funciones, continuidad y asíntotas, la derivada con la recta tangente, y estadística de dos variables con probabilidad por recuento. **Quedan fuera a propósito**, y son ya de 2º de Bachillerato: las indeterminaciones completas, el estudio completo de una función con la segunda derivada y los puntos de inflexión, las integrales, las matrices y los determinantes. Se da por sabido lo de 4º de ESO: la ecuación de segundo grado, los radicales de índice 2, las progresiones, la trigonometría del triángulo rectángulo y la geometría analítica básica. Todo se resuelve con lápiz, papel y una calculadora corriente. Esto sirve para localizar lo que flojea; no sustituye al libro ni a las clases.

Números reales, valor absoluto y radicales

Lo que hay que saber

Valor absoluto: $|a|$ es a si a es positivo o cero, y $-a$ si a es negativo. Se lee como una **distancia**: $|x - c|$ es lo que dista x del número c .

Por eso $|x - c| \leq r$ describe el intervalo cerrado centrado en c de radio r , y $|x - c| > r$, las dos ramas de fuera. Una desigualdad con valor absoluto se resuelve pasándola a dos condiciones sin valor absoluto, una por cada signo posible de lo que hay dentro.

▲ $\sqrt{x^2} = |x|$, no x . Con $x = -3$, la raíz de 9 es 3 y no -3 . La raíz cuadrada devuelve siempre un resultado positivo o cero.

Con **radicales de índices distintos** no vale mirar el radicando para compararlos: la raíz cúbica de 8 y la raíz cuadrada de 4 valen las dos 2. Con radicandos positivos se reducen al mínimo común múltiplo de los índices, elevando cada radicando al cociente correspondiente; ya con el mismo índice, manda el radicando.

▪ Con un radicando negativo ese cambio de índice no vale: la raíz cúbica de -8 es -2 y la raíz sexta de 64 es 2.

Racionalizar es quitar la raíz del denominador sin cambiar el valor. Con una raíz cuadrada sola se multiplica arriba y abajo por esa raíz; con una suma o resta de raíces cuadradas, por lo mismo pero invirtiendo el signo que hay entre ellas; con una raíz de índice n hay que completar una potencia n dentro de la raíz.

▪ El conjugado *solo* sirve para índice 2. Con una raíz cúbica no racionaliza nada: hace falta pensar qué falta para completar el cubo.

- 1 Escribe como intervalo los números x que cumplen $|x - 4| \leq 3$ y los que cumplen $|2x + 1| > 5$. Di además si el 0 pertenece a alguno de los dos conjuntos.

Solución

$|x - 4| \leq 3$ dice que x se queda a tres unidades o menos del 4. Los extremos son $4 - 3 = 1$ y $4 + 3 = 7$, y los dos entran porque la desigualdad admite la igualdad: **[1, 7]**.

$|2x + 1| > 5$ exige lo contrario: alejarse. Se parte en dos condiciones, $2x + 1 > 5$ y $2x + 1 < -5$. De la primera sale $x > 2$ y de la segunda, $x < -3$.

El conjunto son las dos ramas de fuera: $x < -3$ o bien $x > 2$, es decir los intervalos $(-\infty, -3)$ y $(2, +\infty)$. Los extremos quedan fuera porque la desigualdad es estricta.

El 0 no pertenece a ninguno de los dos. Sustituyendo: $|0 - 4| = 4$, que no es menor o igual que 3, así que el 0 se queda fuera del primero; y $|2 \cdot 0 + 1| = 1$, que no es mayor que 5, así que también se queda fuera del segundo.

Para corregirte, toma un valor dentro de cada tramo: el 1 y el 7 dan $|1 - 4| = 3$ y $|7 - 4| = 3$, justo el tope; y el -4 y el 3 dan $|2x + 1| = 7$ en los dos casos, que sí pasa de 5.

- 2 Ordena de menor a mayor, sin calculadora, estos tres números: **la raíz cúbica de 2**, $\sqrt{3}$ y **la raíz sexta de 20**.

Solución

Con índices distintos, comparar los radicandos no dice nada, así que primero se reducen todos al mismo índice. El mínimo común múltiplo de 3, 2 y 6 es **6**.

La raíz cúbica de 2 pasa a índice 6 elevando el radicando al cuadrado: queda la raíz sexta de $2^2 = 4$. La raíz cuadrada de 3 pasa elevándolo al cubo: la raíz sexta de $3^3 = 27$. Y la tercera ya está en índice 6, con radicando 20.

Con el mismo índice, manda el radicando: $4 < 20 < 27$.

El orden es, por tanto, **raíz cúbica de 2 < raíz sexta de 20 < $\sqrt{3}$** .

Para corregirte, deshaz el paso: eleva cada uno a la sexta potencia y tienen que salir exactamente 4, 20 y 27. ▲ Ese paso se apoya en que los tres son positivos: entre números positivos, elevar a una potencia conserva el orden. Con negativos no se puede dar por hecho y hay que mirarlo aparte, porque el exponente par y el impar no se comportan igual.

3

Racionaliza el denominador y deja el resultado lo más simple posible: (a) **5 dividido entre la raíz cúbica de 4**; (b) **$8 / (3 - \sqrt{5})$** .

Solución

(a) Con una raíz cúbica no sirve el conjugado: lo que hace falta es completar un cubo perfecto dentro de la raíz. Como $4 \cdot 2 = 8$ y la raíz cúbica de 8 es 2, se multiplica arriba y abajo por la **raíz cúbica de 2**.

Abajo queda la raíz cúbica de $4 \cdot 2 = 8$, o sea 2. Arriba, 5 por la raíz cúbica de 2. Resultado: **5 por la raíz cúbica de 2, dividido entre 2**.

(b) Aquí abajo hay una resta con una raíz cuadrada, así que sí se multiplica por la misma resta con el signo cambiado, $3 + \sqrt{5}$, porque $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$.

Abajo queda $3^2 - (\sqrt{5})^2 = 9 - 5 = 4$. Arriba, $8(3 + \sqrt{5})$. Y $8 \div 4 = 2$, así que sale **$6 + 2\sqrt{5}$** .

Para corregirte en (b), deshaz la operación: $(3 - \sqrt{5})(6 + 2\sqrt{5}) = 18 + 6\sqrt{5} - 6\sqrt{5} - 2 \cdot 5 = 8$, que era el numerador de partida. Y en (a), eleva las dos expresiones al cubo: las dos dan $125/4$.

Logaritmos

Lo que hay que saber

$\log_a N = x$ significa exactamente **$a^x = N$** . Un logaritmo es un exponente, y conviene repetírselo cada vez que uno se atasca.

La base tiene que ser un número positivo distinto de 1, y **solo tienen logaritmo los números estrictamente positivos**. Con una base mayor que 1 —que son las de este curso, la 10 y la 2—, el logaritmo de un número entre 0 y 1 sale negativo; con una base entre 0 y 1 pasa justo al revés, y $\log_{1/2}$ de $1/4$ vale 2.

Las tres propiedades: el logaritmo de un **producto** es la suma de los logaritmos; el de un **cociente**, la resta; y el de una **potencia**, el exponente por el logaritmo. Las tres piden que los números de dentro sean positivos.

• **No hay ninguna propiedad para la suma.** $\log(a + b)$ no se puede descomponer, y desde luego no es $\log a + \log b$, que es el logaritmo del producto. Quien la usa ya no puede salvar la cuenta.

Ecuación exponencial: si se consigue poner los dos lados como potencias de la misma base, se igualan los exponentes. Si no, se toman logaritmos en los dos lados.

Ecuación logarítmica: se junta cada lado en un solo logaritmo y se quitan. ▲ Después hay que *comprobar en la ecuación de partida*: el proceso puede producir candidatos que dejen un logaritmo de un número negativo o de cero.

4

Calcula sin calculadora: (a) **$\log_2 32$** ; (b) **$\log_9 3$** ; (c) **$\log 0,001$** (logaritmo decimal).

Solución

Un logaritmo es un exponente: $\log_a N$ es el número al que hay que elevar la base **a** para obtener **N**. Así que cada apartado se resuelve preguntándose «¿a qué exponente?».

(a) $2^5 = 32$, luego **$\log_2 32 = 5$** .

(b) Hay que elevar 9 a algo para que dé 3, y 3 es menor que 9: el exponente será menor que 1.

Como $9^{1/2}$ es la raíz cuadrada de 9, que vale 3, sale **$\log_9 3 = 1/2$** .

(c) 0,001 es $1/1000$, que es 10^{-3} . Luego **$\log 0,001 = -3$** .

Para corregirte, deshaz cada uno elevando: 2^5 tiene que dar 32, 3^2 tiene que dar 9 y 10^3 tiene que dar 1.000. ▲ Y fíjate en el signo del tercero: con una base mayor que 1, como la de aquí, el logaritmo de un número entre 0 y 1 sale negativo, porque hay que elevar la base a un exponente negativo.

5

Tomando como valores aproximados **$\log 2 = 0,3010$** y **$\log 3 = 0,4771$** , calcula **$\log 12$** y **$\log 0,75$** . Después compara **$\log 5$** con **$\log 2 + \log 3$** .

Solución

Se descompone cada número en productos y cocientes de 2, de 3 y de 10, que son los únicos logaritmos conocidos.

$12 = 2^2 \cdot 3$, así que $\log 12 = 2 \cdot \log 2 + \log 3 = 0,6020 + 0,4771 = \mathbf{1,0791}$. Como los datos de partida son aproximados, todos los resultados de este ejercicio lo son también: arrastran esa aproximación.

$0,75 = 3/4 = 3 \div 2^2$, así que $\log 0,75 = \log 3 - 2 \cdot \log 2 = 0,4771 - 0,6020 = \mathbf{-0,1249}$. Sale negativo, y tiene que salirlo: 0,75 es menor que 1.

Para el tercero, $5 = 10 \div 2$, luego $\log 5 = 1 - 0,3010 = \mathbf{0,6990}$. En cambio $\log 2 + \log 3 = 0,7781$. **No coinciden**: se llevan 0,0791.

▪ Con estos números delante ya no hay duda: **$\log(a + b)$ no es $\log a + \log b$** . La suma de logaritmos corresponde al *producto*, no a la suma: $\log 2 + \log 3$ es $\log 6$, no $\log 5$. Aquí lo acabas de ver con números.

Para corregirte, comprueba la descomposición antes que la cuenta: si 12 no fuera $2^2 \cdot 3$, el resultado estaría mal aunque la suma esté bien hecha.

6

Resuelve: (a) **$3^{2x-1} = 81$** ; (b) **$\log x + \log (x - 3) = 1$** .

Solución

(a) Se escriben los dos lados como potencias de la misma base. Como $81 = 3^4$, la igualdad pasa a ser de exponentes: $2x - 1 = 4$.

De ahí, $2x = 5$ y **$x = 5/2$** . Comprobación: $2 \cdot (5/2) - 1 = 4$, y $3^4 = 81$.

(b) Primero se junta el lado izquierdo: la suma de dos logaritmos es el logaritmo del producto, así que queda $\log [x(x - 3)] = 1$. Y un logaritmo decimal igual a 1 significa que el número de dentro es 10.

Queda $x^2 - 3x = 10$, o sea $x^2 - 3x - 10 = 0$, con discriminante $9 + 40 = 49$. Las soluciones de esa ecuación son **$x = 5$** y **$x = -2$** .

▲ Pero la ecuación de partida no es la cuadrática: es la de los logaritmos. Con $x = -2$, el segundo logaritmo sería $\log(-5)$, y los números negativos no tienen logaritmo. Así que **la única solución es $x = 5$** .

Para corregirte, sustituye en la ecuación *original*, no en la cuadrática: $\log 5 + \log 2 = \log 10 = 1$.

Inecuaciones y sistemas no lineales

Lo que hay que saber

Una inecuación no se resuelve como una ecuación. El método es: pasar todo a un lado, hallar dónde vale cero el numerador y dónde el denominador, y esos valores **parten la recta en zonas**. Después basta con tomar un valor cualquiera dentro de cada una y mirar qué signo sale.

▪ **No se multiplica por una expresión con x si no se conoce su signo.** Al multiplicar por un número negativo la desigualdad se da la vuelta, y como no se sabe cuál es el signo, no se puede hacer.

Los valores que anulan el **numerador** entran en la solución si la desigualdad admite la igualdad ($\leq$ o $\geq$); los que anulan el **denominador** no entran nunca, porque ahí no hay número.

Una desigualdad de segundo grado se puede leer también por la forma de la parábola, y lo primero es mirar el discriminante. Si hay **dos raíces distintas** y el término de segundo grado lleva signo positivo, el resultado sale negativo dentro del tramo que separan las dos raíces y positivo a los lados, y con signo negativo ocurre al revés; si el discriminante es cero solo se anula en un punto, y si es negativo el signo es el mismo en toda la recta.

Sistema no lineal: se despeja una incógnita en la ecuación más sencilla y se sustituye en la otra. Suele quedar una ecuación de segundo grado, que según su discriminante deja dos soluciones, una o ninguna, y cada una arrastra su pareja.

▲ Cada valor despejado arrastra el suyo: las soluciones van emparejadas, y mezclarlas produce puntos que no cumplen el sistema.

7

Resuelve la inecuación $x^2 - x - 6 > 0$ y escribe la solución con intervalos.

Solución

Primero se buscan los valores donde el lado izquierdo vale cero, porque son los únicos sitios donde puede cambiar de signo: $x^2 - x - 6 = 0$ tiene discriminante $1 + 24 = 25$ y soluciones **-2 y 3**.

Esos dos números parten la recta en tres zonas. Basta con probar un número de cada una.

En $x = -3$: $9 + 3 - 6 = 6$, positivo. En $x = 0$: $0 - 0 - 6 = -6$, negativo. En $x = 4$: $16 - 4 - 6 = 6$, positivo.

Se pide *mayor* que cero, así que la solución son las dos zonas de fuera: **$x < -2$ o $x > 3$** , es decir los intervalos $(-\infty, -2)$ y $(3, +\infty)$. Los extremos no entran porque ahí vale exactamente 0.

▲ Resolver la ecuación no es resolver la inecuación: la ecuación da números sueltos y la inecuación, aquí, dos tramos enteros. Cuántos salen depende del caso: $x^2 < 0$ no da ninguno y $x^2 \leq 0$ deja un punto suelto. El paso que falta es siempre el mismo, probar el signo en cada zona.

8

Resuelve $(x - 1) / (x + 2) \leq 0$.

Solución

Una fracción es negativa o cero cuando el numerador y el denominador tienen signos distintos, o cuando el numerador vale cero. Así que se miran los dos por separado.

El numerador se anula en **$x = 1$** y el denominador, en **$x = -2$** . Esos dos números parten la recta en tres zonas.

En $x = -5$ la fracción vale $(-6) \div (-3) = 2$, positiva. En $x = 0$ vale $(-1) \div 2 = -1/2$, negativa. En $x = 2$ vale $1 \div 4 = 1/4$, positiva.

La zona buena es la de en medio. El **1 entra**, porque ahí la fracción vale 0 y la desigualdad lo permite; el **-2 no entra nunca**, porque ahí no hay fracción. Solución: **$[-2, 1]$** .

▪ Lo que *no* se puede hacer es multiplicar los dos lados por $(x + 2)$ para quitar la fracción: no se sabe si es positivo o negativo, y al multiplicar por un negativo la desigualdad se da la vuelta. Quien lo hace obtiene « $x \leq 1$ » y se queda con el -5, que ya has visto que da 2 y no cumple nada.

9

Resuelve el sistema $x^2 + y^2 = 25$ y $x - y = 1$, y comprueba las dos soluciones.

Solución

La segunda ecuación es la fácil de despejar: $y = x - 1$. Se sustituye en la primera, que es la que no es una recta.

Queda $x^2 + (x - 1)^2 = 25$. Desarrollando, $x^2 + x^2 - 2x + 1 = 25$, o sea $2x^2 - 2x - 24 = 0$, y dividiendo entre 2: $x^2 - x - 12 = 0$.

El discriminante es $1 + 48 = 49$, y las soluciones son $x = 4$ y $x = -3$. Con $y = x - 1$ salen los puntos **(4, 3)** y **(-3, -4)**.

Comprobación en las *dos* ecuaciones y con los *dos* puntos: $16 + 9 = 25$ y $4 - 3 = 1$; $9 + 16 = 25$ y $-3 - (-4) = 1$. Los cuatro resultados cuadran.

▲ Cada valor de x arrastra su propio valor de y : emparejar el 4 con el -4 daría un punto que no cumple la segunda ecuación. Comprueba cada punto en las dos ecuaciones, no solo en la que usaste para despejar.

Números complejos

Lo que hay que saber

La **unidad imaginaria** es el número i que cumple $i^2 = -1$. Con él, toda ecuación de segundo grado tiene solución.

Forma binómica: $z = a + bi$, con a la parte real y b la parte imaginaria. Se suma y se multiplica como con binomios, sustituyendo i^2 por -1 al final. Los números reales son los que tienen la parte imaginaria igual a 0.

El **conjugado** de $a + bi$ es $a - bi$. Para qué sirve: z multiplicado por su conjugado da siempre un número real no negativo, y con él se **divide**, multiplicando arriba y abajo por el conjugado del denominador. ■ Salvo que el denominador sea 0: entonces ese producto también vale 0 y no hay división posible.

El **módulo** de $a + bi$ es la raíz de $a^2 + b^2$, y coincide con la raíz del producto de z por su conjugado. ▲ No es la suma de las dos partes, y no identifica al número: para cualquier módulo positivo hay infinitos complejos que lo tienen. Solo el módulo 0 corresponde a un único número, el 0.

Si el **discriminante** de una ecuación de segundo grado con coeficientes reales es negativo, hay dos soluciones complejas **conjugadas**. La frase de 4º de ESO «no tiene solución» ahora se dice entera: no tiene solución *real*.

Las **potencias de i** se repiten de cuatro en cuatro: $i, -1, -i, 1$. Basta con el resto de dividir el exponente entre 4.

10

Con $z = 3 + 2i$ y $w = 1 - 4i$, calcula (a) $z \cdot w$ y (b) z / w , dejando los dos en forma binómica.

Solución

(a) Se multiplica como dos binomios y al final se usa que $i^2 = -1$.

$(3 + 2i)(1 - 4i) = 3 - 12i + 2i - 8i^2$. El último término es $-8 \cdot (-1) = +8$, así que se suma a la parte real: **11 - 10i**.

(b) Para dividir se multiplica arriba y abajo por el **conjugado** del denominador, que es $1 + 4i$. Abajo queda $1^2 + 4^2 = 17$, un número real.

Arriba, $(3 + 2i)(1 + 4i) = 3 + 12i + 2i - 8 = -5 + 14i$. El cociente es **$-5/17 + (14/17)i$** .

Para corregirte, deshaz la división multiplicando el resultado por w : $(-5/17 + (14/17)i)(1 - 4i)$ tiene que devolver exactamente $3 + 2i$, y lo hace.

11

Resuelve $x^2 - 4x + 13 = 0$ y valida lo que obtengas sumando y multiplicando sus dos soluciones.

Solución

El discriminante es $(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 13 = 16 - 52 = -36$. En 4º de ESO esto se cerraba con «no tiene solución»; ahora la frase completa es «no tiene solución **real**».

La raíz de -36 se escribe $6i$, porque $(6i)^2 = 36 \cdot (-1) = -36$. Aplicando la fórmula, $x = (4 \pm 6i) / 2$.

Las soluciones son $2 + 3i$ y $2 - 3i$, que son conjugadas una de otra. Siempre pasa cuando los coeficientes son reales.

Comprobación con la suma y el producto, que valen $-b/a$ y c/a : $(2 + 3i) + (2 - 3i) = 4$, que es $-(-4)/1$; y $(2 + 3i)(2 - 3i) = 4 + 9 = 13$, que es $13/1$. Las dos cuadran.

▲ En una cuadrática, la suma y el producto juntos *bastan*: si los dos cuadran, esas son las raíces. Sustituir una de ellas en la ecuación no añade certeza, pero es una cuenta independiente y caza un error de copia. Aquí, $(2 + 3i)^2 - 4(2 + 3i) + 13 = 0$.

12

Dado $z = 3 - 4i$: (a) calcula su módulo; (b) calcula su conjugado y el producto de z por su conjugado; (c) calcula i^{2026} ; (d) escribe otro número complejo distinto de z que tenga el mismo módulo.

Solución

(a) El módulo es la raíz de la suma de los cuadrados de las dos partes: $3^2 + (-4)^2 = 9 + 16 = 25$, y su raíz es **5**.

(b) El conjugado cambia el signo de la parte imaginaria: **$3 + 4i$** . Y el producto $(3 - 4i)(3 + 4i) = 9 + 16 = 25$, que es el módulo al cuadrado. Eso pasa siempre, y es justo lo que hace útil al conjugado para dividir.

(c) Las potencias de i se repiten de cuatro en cuatro: $i, -1, -i, 1$. Basta con el resto de dividir el exponente entre 4. Como $2026 = 4 \cdot 506 + 2$, el resto es 2, luego $i^{2026} = i^2 = -1$.

(d) Sirve cualquier complejo cuyas dos partes den 25 al sumar sus cuadrados. Por ejemplo **$4 + 3i$** : $16 + 9 = 25$, módulo 5, y desde luego no es $3 - 4i$.

▲ El apartado (d) enseña algo que conviene no olvidar: el módulo no identifica a un número complejo, igual que un radio no identifica a un punto. Hay infinitos complejos de módulo 5.

Trigonometría: radianes, cuadrantes e identidades

Lo que hay que saber

$180^\circ = \pi$ radianes. De grados a radianes se multiplica por $\pi/180$ y al revés, por $180/\pi$. Un ángulo en radianes es un número sin unidad.

Los cuadrantes se cuentan desde 0° girando en sentido contrario al de las agujas de un reloj: el primero llega a 90° , el segundo a 180° , el tercero a 270° y el cuarto a 360° . ▲ Los propios 0° , 90° , 180° y 270° no caen dentro de ningún cuadrante: son los ejes, y allí la regla de signos no se aplica, porque alguna razón se anula y la tangente de 90° ni siquiera existe.

Signos por cuadrante: en el primero los tres son positivos; en el segundo solo el seno; en el tercero solo la tangente; en el cuarto solo el coseno.

Para un ángulo de cualquier cuadrante, su razón se calcula con la del **ángulo de referencia** del primer cuadrante ($180 - x$, $x - 180$ o $360 - x$, según dónde caiga) y después se le pone el signo que le toque.

Identidad fundamental: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, válida para cualquier ángulo. Permite pasar de una razón a la otra, pero solo **en valor absoluto**: el signo lo decide el cuadrante.

▪ Comprobar una igualdad en un ángulo concreto *no* la demuestra. Para demostrar una identidad hay que transformar un lado hasta convertirlo en el otro.

- 13** (a) Pasa **135°** a radianes. (b) Pasa **$7\pi/6$** radianes a grados. (c) Di en qué cuadrante cae cada uno y con qué signo salen allí sus tres razones trigonométricas.

Solución

La equivalencia es $180^\circ = \pi$ radianes, así que para pasar de grados a radianes se multiplica por $\pi/180$ y para volver, por $180/\pi$.

(a) $135 \cdot \pi/180 = \mathbf{3\pi/4}$ radianes, porque $135/180$ se simplifica a $3/4$.

(b) $(7\pi/6) \cdot (180/\pi) = 7 \cdot 30 = \mathbf{210^\circ}$.

(c) 135° está entre 90° y 180° : **segundo cuadrante**. Allí el seno es positivo y el coseno negativo, así que la tangente, que es su cociente, sale negativa.

Y 210° está entre 180° y 270° : **tercer cuadrante**. Allí el seno y el coseno son los dos negativos, así que la tangente sale **positiva**.

Para corregirte, deshaz el cambio de unidad: $3\pi/4$ multiplicado por $180/\pi$ tiene que devolver 135, y 210 multiplicado por $\pi/180$ tiene que devolver $7\pi/6$.

- 14** Sabiendo que **$\sen \alpha = 3/5$** y que **α está en el segundo cuadrante**, calcula **$\cos \alpha$** y **$\tg \alpha$** .

Solución

De la identidad fundamental, $\cos^2 \alpha = 1 - \sen^2 \alpha = 1 - 9/25 = \mathbf{16/25}$.

Esa igualdad deja *dos* posibilidades, $4/5$ y $-4/5$, porque las dos elevadas al cuadrado dan $16/25$. Quien decide es el cuadrante, no la identidad.

En el segundo cuadrante el coseno es negativo, así que **$\cos \alpha = -4/5$** .

La tangente es el cociente: $(3/5) \div (-4/5) = \mathbf{-3/4}$, negativa, como corresponde al segundo cuadrante.

▪ Y aquí va lo importante: **la identidad $\sen^2 + \cos^2 = 1$ no detecta este error**. Si tomas $\cos \alpha = +4/5$, la identidad sigue dando $9/25 + 16/25 = 1$ y parece que todo está bien. Lo que delata el fallo es el signo de la tangente, que pasaría de $-3/4$ a $+3/4$, y el cuadrante que decía el enunciado.

15

Halla, sin usar calculadora, el valor exacto de **sen 150°**, **cos 225°** y **tg 300°**.

Solución

Cada uno se reduce a un ángulo del primer cuadrante y después se le pone el signo que le toca por su cuadrante.

150° está en el segundo cuadrante y su ángulo de referencia es $180 - 150 = 30^\circ$. El seno es positivo ahí, luego **sen 150° = sen 30° = 1/2**.

225° está en el tercero y su referencia es $225 - 180 = 45^\circ$. El coseno es negativo ahí, luego **cos 225° = $-\sqrt{2}/2$** .

300° está en el cuarto y su referencia es $360 - 300 = 60^\circ$. La tangente es negativa ahí, luego **tg 300° = -tg 60° = $-\sqrt{3}$** , que está entre -1,74 y -1,73.

Para corregirte, usa la identidad fundamental con el segundo: $\text{sen } 225^\circ$ también vale $-\sqrt{2}/2$, y $(-\sqrt{2}/2)^2 + (-\sqrt{2}/2)^2 = 1/2 + 1/2 = 1$. ▲ Esa comprobación valida el valor absoluto, no el signo: para el signo, el cuadrante.

16

Demuestra que **$(1 - \cos^2 x) / (\text{sen } x \cdot \cos x) = \text{tg } x$** cuando ni sen x ni cos x valen cero, y compruébalo después con $x = 30^\circ$.

Solución

Se trabaja solo con el lado izquierdo hasta convertirlo en el derecho. Por la identidad fundamental, $1 - \cos^2 x = \text{sen}^2 x$.

Sustituyendo, el cociente queda $\text{sen}^2 x / (\text{sen } x \cdot \cos x)$. Se simplifica un seno arriba y abajo —y aquí hace falta que sen x no sea cero— y queda $\text{sen } x / \cos x$, que es **tg x**. La igualdad queda demostrada.

Comprobación con $x = 30^\circ$, donde $\text{sen } 30^\circ = 1/2$ y $\cos 30^\circ = \sqrt{3}/2$: arriba, $1 - 3/4 = 1/4$; abajo, $(1/2)(\sqrt{3}/2) = \sqrt{3}/4$. El cociente es $1/\sqrt{3} = \sqrt{3}/3$, que es exactamente $\text{tg } 30^\circ$.

▪ Pero esa comprobación *no* demuestra nada por sí sola, y conviene tenerlo claro: «sen x = cos x» también se cumple en $x = 45^\circ$, donde los dos valen $\sqrt{2}/2$, y desde luego no es una identidad, porque en 30° uno vale $1/2$ y el otro $\sqrt{3}/2$. Un ángulo que cuadra es una pista; la demostración es la cadena de igualdades de arriba.

Resolución de triángulos: teoremas del seno y del coseno

Lo que hay que saber

Teorema del seno: $a/\sin A = b/\sin B = c/\sin C$. Se usa cuando se conoce un lado con su ángulo opuesto y un dato más.

Teorema del coseno: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A$. Se usa con dos lados y el ángulo comprendido, o con los tres lados.

▲ Con un ángulo de 90° el coseno vale 0 y el teorema del coseno se convierte en el de Pitágoras. Es un buen control de que la fórmula está bien copiada.

Área con dos lados y el ángulo comprendido: $(1/2) \cdot a \cdot b \cdot \sin C$. Como un ángulo y su suplementario tienen el mismo seno, dos triángulos muy distintos pueden tener la misma área.

El caso ambiguo. Cuando se conocen dos lados y un ángulo que *no* está entre ellos, el teorema del seno da el seno del otro ángulo. Si ese seno pasa de 1 no hay triángulo; si vale exactamente 1 solo cabe el ángulo recto; y si queda entre 0 y 1 hay dos ángulos con ese seno, uno agudo y su suplementario, y entonces hay que comprobar si los dos caben en un triángulo.

En cualquier triángulo, al **lado mayor** se le opone el **ángulo mayor**, y los tres ángulos suman 180° . Son dos controles rápidos para ver si el resultado es creíble. ■ Pero no sirven para elegir entre los dos triángulos del caso ambiguo: puede tocarle ser el mayor al mismo lado en los dos.

- 17** En un triángulo, **a = 7 m**, **b = 5 m** y el ángulo que forman esos dos lados mide **C = 60°**. Calcula el tercer lado.

Solución

Se conocen dos lados y el ángulo que hay entre ellos, así que el que sirve es el **teorema del coseno**: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos C$.

$a^2 + b^2 = 49 + 25 = 74 \text{ m}^2$. Y el término que se resta vale $2 \cdot 7 \cdot 5 \cdot \cos 60^\circ = 70 \cdot (1/2) = 35 \text{ m}^2$.

Así que $c^2 = 74 - 35 = 39 \text{ m}^2$ y **c = $\sqrt{39}$ metros**, un valor que está entre 6,24 y 6,25 porque $6,24^2 = 38,9376$ y $6,25^2 = 39,0625$.

Para corregirte sin repetir la cuenta, mira si el resultado es creíble: el ángulo C mide menos de 90° , así que su lado opuesto tiene que ser *menor* que la hipotenusa que saldría con un ángulo recto, y con un ángulo recto c^2 valdría los 74 m^2 de la primera línea. Efectivamente, 39 es menor que 74.

▲ Y el otro control: al lado mayor se le opone el ángulo mayor, así que, como $c = \sqrt{39}$ ha salido entre 5 y 7, el ángulo C tiene que quedar entre los otros dos y no ser el mayor.

- 18** En un triángulo, **a = 6 m**, **b = 8 m** y el ángulo opuesto al lado a mide **A = 30°**. Calcula el seno del ángulo B y di cuántos triángulos distintos cumplen esos datos.

Solución

Aquí se conocen dos lados y un ángulo que *no* está entre ellos, así que se usa el **teorema del seno**: $a/\sin A = b/\sin B$.

Despejando, $\sin B = b \cdot \sin A / a = 8 \cdot (1/2) / 6 = 2/3$.

El seno no determina el ángulo: hay **dos** ángulos entre 0° y 180° con seno $2/3$, uno agudo y otro obtuso, y son suplementarios. Los dos dejan sitio para el ángulo A de 30° , porque incluso el obtuso, sumado a 30° , no llega a 180° . Así que **hay dos triángulos distintos**.

Se separan por el coseno de B, que sale de la identidad fundamental: $\cos^2 B = 1 - 4/9 = 5/9$, luego $\cos B = \sqrt{5}/3$ en el caso en que B es agudo y $\cos B = -\sqrt{5}/3$ en el caso en que B es obtuso. Cuidado con el nombre: lo agudo o lo obtuso es el ángulo B, porque los dos triángulos son obtusángulos —en el primero el ángulo obtuso es el tercero, el C.

Sus terceros lados se calculan con $c = 12 \cdot \sin C$, y salen **$4\sqrt{3} + 2\sqrt{5}$ metros** (entre 11,39 y 11,41) y

$4\sqrt{3} - 2\sqrt{5}$ metros (entre 2,44 y 2,46). Los dos son positivos, así que los dos triángulos existen de verdad.

Para corregirte, mete cada uno en el teorema del coseno con el lado a : $b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos 30^\circ$ tiene que devolver 36 m^2 en los dos casos, y lo hace.

19

Un triángulo tiene $a = 10 \text{ m}$, $b = 6 \text{ m}$ y el ángulo comprendido $C = 150^\circ$. Calcula su área, y compárala con la del triángulo que tendría los mismos lados y $C = 30^\circ$.

Solución

El área con dos lados y el ángulo comprendido es $(1/2) \cdot a \cdot b \cdot \sin C$.

Con $C = 150^\circ$: $\sin 150^\circ = 1/2$, así que el área es $(1/2) \cdot 10 \cdot 6 \cdot (1/2) = 15 \text{ m}^2$.

Con $C = 30^\circ$: $\sin 30^\circ$ también vale $1/2$, porque 150° y 30° son suplementarios. El área vuelve a ser 15 m^2 : las dos son iguales.

Pero los triángulos no lo son. El teorema del coseno da $c^2 = 136 - 120 \cdot \cos C$, y $\cos 150^\circ = -\sqrt{3}/2$ mientras que $\cos 30^\circ = +\sqrt{3}/2$. Sale $c^2 = 136 + 60\sqrt{3} \text{ m}^2$ en un caso y $136 - 60\sqrt{3} \text{ m}^2$ en el otro, y $60\sqrt{3}$ está entre 103,92 y 103,93, así que uno pasa de 239 m^2 y el otro no llega a 33 m^2 .

▲ Conclusión que conviene apuntar: **el área no identifica al triángulo**. Dos lados iguales y la misma área pueden corresponder a dos triángulos muy distintos, uno achatado y otro no. Para distinguirlos hace falta el tercer lado o el ángulo.

Vectores en el plano

Lo que hay que saber

Un vector se da por sus **coordenadas**, y las sumas, restas y productos por un número se hacen componente a componente. Para obtener el vector con origen en A y extremo en B se restan a las coordenadas de B las de A.

El **módulo** de (x, y) es la raíz de $x^2 + y^2$. Si el vector no es el **vector cero**, un **vector unitario** con su misma dirección y sentido se obtiene dividiendo cada coordenada entre el módulo, que es positivo. El vector cero no se puede dividir así ni forma ángulo con ningún otro.

▲ Dos vectores son iguales cuando lo son sus *dos* coordenadas. Tener el mismo módulo no basta, y tener la misma dirección tampoco: puede cambiar el sentido.

Producto escalar con coordenadas: se multiplican las primeras componentes, se multiplican las segundas y se suma. El resultado es un **número**, no un vector.

Entre dos vectores no nulos, el signo del producto escalar acota el ángulo antes de calcular nada: positivo si mide menos de 90° , cero si mide 90° y negativo si mide más. ▲ Los extremos cuentan: dos vectores del mismo sentido forman 0° y dan producto positivo, y dos de sentidos opuestos forman 180° y lo dan negativo. Producto escalar cero entre vectores no nulos significa **perpendiculares**.

Ángulo entre dos vectores: su coseno es el producto escalar dividido entre el producto de los dos módulos.

20

Con $\mathbf{u} = (3, -4)$ y $\mathbf{v} = (-2, 6)$: (a) calcula $2\mathbf{u} - \mathbf{v}$; (b) calcula el módulo de $\mathbf{u}$; (c) escribe un vector unitario con la misma dirección y el mismo sentido que $\mathbf{u}$.

Solución

(a) Las operaciones se hacen componente a componente. La primera: $2 \cdot 3 - (-2) = 6 + 2 = 8$. La segunda: $2 \cdot (-4) - 6 = -8 - 6 = -14$. Queda $2\mathbf{u} - \mathbf{v} = (8, -14)$.

(b) El módulo es la raíz de la suma de los cuadrados: $3^2 + (-4)^2 = 9 + 16 = 25$, y su raíz es **5**.

(c) Un vector unitario en la misma dirección y sentido se consigue dividiendo cada componente entre el módulo: **$(3/5, -4/5)$** .

Para corregirte en (c), comprueba que de verdad mide 1: $(3/5)^2 + (-4/5)^2 = 9/25 + 16/25 = 1$.

▲ Ojo con el sentido en (c): dividir entre -5 en vez de entre 5 también da un vector unitario, pero apuntando al revés. Hay que dividir entre el módulo, que es un número positivo.

21

Con $\mathbf{u} = (3, -4)$ y $\mathbf{v} = (8, 6)$: (a) calcula el producto escalar y di qué ángulo forman; (b) calcula el módulo de $\mathbf{v}$; (c) escribe un vector distinto de $\mathbf{u}$ que tenga el mismo módulo que $\mathbf{u}$.

Solución

(a) El producto escalar con coordenadas es la suma de los productos de las componentes: $3 \cdot 8 + (-4) \cdot 6 = 24 - 24 = 0$. Un producto escalar nulo entre dos vectores no nulos significa que forman **90°**: son perpendiculares.

(b) El módulo de $\mathbf{v}$: $8^2 + 6^2 = 64 + 36 = 100$, luego $|\mathbf{v}| = 10$.

Conviene fijarse en que *ninguno de los dos es el vector cero*: sus módulos son 5 y 10. El producto escalar ha salido cero por la perpendicularidad, no porque falte un vector.

(c) Vale cualquiera cuyas componentes al cuadrado sumen 25. Por ejemplo **(4, 3)**: $16 + 9 = 25$, módulo 5, y no es $(3, -4)$.

▲ De ahí sale una advertencia útil: dos vectores con el mismo módulo pueden ser distintos, porque el módulo solo mide la longitud. Para que dos vectores sean iguales hacen falta las dos coordenadas iguales.

22

Calcula el ángulo que forman $\mathbf{u} = (1, \sqrt{3})$ y $\mathbf{v} = (\sqrt{3}, 1)$.

Solución

Se usa la fórmula del coseno del ángulo: $\cos$ del ángulo = producto escalar dividido entre el producto de los módulos.

Producto escalar: $1 \cdot \sqrt{3} + \sqrt{3} \cdot 1 = 2\sqrt{3}$. Sale positivo, así que ya se sabe que el ángulo es **agudo**, antes incluso de calcularlo.

Módulos: $|\mathbf{u}|^2 = 1 + 3 = 4$, luego $|\mathbf{u}| = 2$; y $|\mathbf{v}|^2 = 3 + 1 = 4$, luego $|\mathbf{v}| = 2$ también.

El coseno vale $2\sqrt{3} / (2 \cdot 2) = \sqrt{3}/2$, que es el coseno de **30°**.

Para corregirte, comprueba el par de valores con la identidad fundamental: si el coseno es $\sqrt{3}/2$, el seno tiene que ser $1/2$, y $(1/2)^2 + (\sqrt{3}/2)^2 = 1/4 + 3/4 = 1$. ▲ Y usa el signo del producto escalar como aviso: si hubiera salido negativo y tú escribes un ángulo agudo, hay un error de signo en alguna componente.

Lo que hay que saber

Una recta queda determinada por un **punto** y un **vector director** (o por dos puntos, que dan el vector restando).

Con el punto (p, q) y el director (v_1, v_2) , que tiene que ser distinto del vector cero —y si la recta se da por dos puntos, tienen que ser dos puntos distintos—: las **paramétricas** son $x = p + v_1 t$ e $y = q + v_2 t$; la **continua** iguala $(x - p)/v_1$ con $(y - q)/v_2$, y solo se puede escribir si ninguna de las dos componentes vale 0; y la **general** sale de multiplicar en cruz y pasarlo todo a un lado: $Ax + By + C = 0$.

En la forma general, **$(-B, A)$ es un vector director** y **(A, B) es perpendicular** a la recta. De ahí salen las paralelas (mismo A y B , distinto C) y las perpendiculares (se intercambian A y B y se cambia un signo).

Posición relativa: si A y B son proporcionales en las dos rectas y C sigue la misma proporción, son **coincidentes**; si C no la sigue, son **paralelas distintas**; y si A y B no son proporcionales, se cortan en un punto.

▪ Por eso «tienen la misma pendiente» no permite concluir que dos rectas no se cortan: pueden ser la misma recta, y entonces se cortan en todos sus puntos.

Distancia de un punto a una recta: se sustituye el punto en $Ax + By + C$, se toma el valor absoluto y se divide entre la raíz de $A^2 + B^2$. Sale lo mismo que midiendo hasta el pie de la perpendicular.

- 23** Escribe las ecuaciones **paramétricas**, la **continua** y la **general** de la recta determinada por el punto **$A(2, -1)$** y el vector director **$(3, 5)$** .

Solución

Las **paramétricas** se leen directamente del punto y del vector: **$x = 2 + 3t$ e $y = -1 + 5t$** , donde t recorre todos los números reales.

La **continua** sale de despejar t en las dos e igualar: **$(x - 2)/3 = (y + 1)/5$** . El $+1$ viene de restar el -1 de la ordenada.

La **general** se obtiene multiplicando en cruz: $5(x - 2) = 3(y + 1)$, y pasando todo a un lado, **$5x - 3y - 13 = 0$** .

Comprobación con el punto de partida: $5 \cdot 2 - 3 \cdot (-1) - 13 = 10 + 3 - 13 = 0$. Y con otro punto cualquiera de la recta, el que da $t = 1$, que es $(5, 4)$: $25 - 12 - 13 = 0$.

▲ Un solo punto no basta para validar la recta: por A pasan infinitas. Por eso la comprobación usa dos puntos, y el segundo se genera con las paramétricas, no se inventa.

- 24** Dada la recta **$r: 5x - 3y - 13 = 0$** y el punto **$P(1, 4)$** , halla la perpendicular a esa recta trazada desde P , el punto en que ambas se cortan y la distancia que hay de P a r .

Solución

El vector director de r es $(3, 5)$, así que la perpendicular tiene como director $(5, -3)$. Su ecuación general es $3x + 5y + k = 0$, y como pasa por P : $3 + 20 + k = 0$, luego $k = -23$. Queda **$3x + 5y - 23 = 0$** .

El corte se halla resolviendo el sistema formado por las dos. Multiplicando la primera por 5 y la segunda por 3 y sumando se elimina la y : $34x = 134$, luego $x = 67/17$. Sustituyendo, $y = 38/17$. El punto es **$(67/17, 38/17)$** .

La distancia de P a r se calcula con la fórmula: $|5 \cdot 1 - 3 \cdot 4 - 13|$ dividido entre la raíz de $5^2 + 3^2$. Arriba, $|5 - 12 - 13| = 20$. Abajo, $\sqrt{34}$. Sale $20/\sqrt{34}$, que racionalizado es **$10\sqrt{34}/17$** , entre 3,42 y 3,43.

Para corregirte, calcula esa distancia por el otro camino: de P al punto de corte hay el vector $(1 - 67/17, 4 - 38/17) = (-50/17, 30/17)$, cuyo módulo al cuadrado es $(2.500 + 900)/289 = 200/17$. Y $(10\sqrt{34}/17)^2$ también es $3.400/289 = 200/17$. Coinciden.

▲ Ese segundo camino es el que de verdad comprueba: repetir la fórmula con los mismos números

vuelve a dar el mismo error si lo hubiera.

- 25** Estudia la posición relativa de estas tres rectas, dos a dos: **r: $2x - y + 1 = 0$** , **s: $4x - 2y - 6 = 0$** y **t: $6x - 3y + 3 = 0$** .

Solución

Se comparan los coeficientes. Los de s son los de r multiplicados por 2 en los dos primeros ($4 = 2 \cdot 2$ y $-2 = 2 \cdot (-1)$), pero el tercero no sigue la proporción: $2 \cdot 1$ sería 2 y en s hay -6 .

Cuando los dos primeros son proporcionales y el tercero no, las rectas son **paralelas distintas: r y s no se cortan nunca**.

Los coeficientes de t son los de r multiplicados por 3, *los tres*: 6, -3 y 3. Entonces las dos ecuaciones dicen lo mismo y **r y t son la misma recta**, o sea coincidentes. Y por tanto s y t son paralelas distintas, igual que s y r.

Comprobación con un punto: el (0, 1) cumple r, porque $0 - 1 + 1 = 0$, y cumple t, porque $0 - 3 + 3 = 0$; pero en s da $0 - 2 - 6 = -8$, distinto de cero.

▪ Aquí está la trampa: las tres tienen la *misma pendiente*, 2, y sin embargo dos de ellas son la misma recta. Tener la misma pendiente no garantiza que dos rectas no se corten: puede ser que se corten en todos los puntos.

Lugares geométricos y la circunferencia

Lo que hay que saber

Un **lugar geométrico** es el conjunto de puntos que cumplen una condición. Se halla escribiendo esa condición con las coordenadas de un punto genérico (x, y) y simplificando.

La **mediatriz** de un segmento es el lugar de los puntos que equidistan de sus dos extremos: la recta perpendicular al segmento que pasa por su punto medio.

Circunferencia de centro (c_1, c_2) y radio r: $(x - c_1)^2 + (y - c_2)^2 = r^2$. Desarrollando se llega a la forma general $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$.

Para volver atrás desde la forma general: el centro es $(-D/2, -E/2)$, y el radio al cuadrado sale de elevar al cuadrado esas dos coordenadas, sumar los dos resultados y restar F.

▪ Una ecuación de esa forma **no siempre es una circunferencia**. Si el radio al cuadrado sale negativo no la cumple ningún punto, y si sale cero la cumple solo el centro. Hay que calcularlo antes de dar nada por hecho.

Para saber si un punto está en una circunferencia hay dos caminos y conviene usarlos los dos: sustituir en la ecuación, o medir su distancia al centro y compararla con el radio.

- 26** Escribe la ecuación general de la circunferencia de centro **C(2, -3)** y radio **5**, y comprueba si el punto **(6, 0)** está en ella.

Solución

Se parte de la forma con centro y radio: $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 25$.

Desarrollando el primer cuadrado sale $x^2 - 4x + 4$; y del segundo, $y^2 + 6y + 9$. Sumando y pasando el 25 al otro lado, el término independiente es $4 + 9 - 25 = -12$.

La ecuación general queda **$x^2 + y^2 - 4x + 6y - 12 = 0$** .

Con el punto (6, 0): $36 + 0 - 24 + 0 - 12 = 0$. Como da cero, **el punto sí está en la circunferencia**.

Para corregirte, hazlo por el otro camino, que no usa la ecuación: la distancia del centro (2, -3) al punto (6, 0) al cuadrado es $4^2 + 3^2 = 25$, y su raíz es 5, que es justo el radio. Los dos métodos coinciden.

27

Decide si estas dos ecuaciones representan una circunferencia: (a) $x^2 + y^2 - 6x + 4y + 20 = 0$; (b) $x^2 + y^2 - 6x + 4y + 13 = 0$.

Solución

En una ecuación de esta forma, el centro se lee cambiando de signo la mitad de los coeficientes de x e y : la mitad de -6 es -3 y cambiada de signo, 3 ; la mitad de 4 es 2 y cambiada de signo, -2 . En los dos casos el centro sería **(3, -2)**.

El radio al cuadrado se obtiene sumando los cuadrados de las coordenadas del centro y restando el término independiente: $9 + 4 - F$.

(a) Con $F = 20$ sale $9 + 4 - 20 = -7$, que es negativo. Ningún radio al cuadrado puede ser negativo, así que **no es una circunferencia**: no hay ni un solo punto que cumpla la ecuación. Se comprueba probando el propio centro, que daría el valor más pequeño posible: $9 + 4 - 18 - 8 + 20 = 7$, y nunca baja de ahí.

(b) Con $F = 13$ sale $9 + 4 - 13 = 0$. El radio es cero, así que la ecuación la cumple **un solo punto**, el centro **(3, -2)**. Tampoco es una circunferencia propiamente dicha.

▲ Por eso no basta con ver que los coeficientes de x^2 e y^2 son iguales y que no hay término en xy : hay que calcular el radio al cuadrado y mirar si es positivo.

28

Halla la ecuación del lugar geométrico de los puntos que están a la misma distancia de **A(-1, 2)** y de **B(5, 4)**.

Solución

Ese lugar geométrico es la **mediatriz** del segmento AB : la recta perpendicular a AB que pasa por su punto medio.

El punto medio es $((-1 + 5)/2, (2 + 4)/2) = (2, 3)$. Y el vector AB es $(5 - (-1), 4 - 2) = (6, 2)$, que sirve de vector perpendicular a la mediatriz.

Una recta con vector perpendicular $(6, 2)$ que pasa por $(2, 3)$ tiene por ecuación $6(x - 2) + 2(y - 3) = 0$. Dividiendo entre 2 queda **$3x + y - 9 = 0$** .

Comprobación en el punto medio: del $(2, 3)$ al A hay $3^2 + 1^2 = 10$ y al B , $(-3)^2 + (-1)^2 = 10$. Iguales.

Y con un segundo punto de la recta, el $(0, 9)$, que cumple $0 + 9 - 9 = 0$: al A hay $1 + 49 = 50$ y al B , $25 + 25 = 50$. También iguales. ▲ Con un solo punto no se distingue la mediatriz de cualquier otra recta que pase por el medio; con dos, sí.

Funciones: dominio, composición e inversa

Lo que hay que saber

El **dominio** está formado por los números con los que la fórmula tiene sentido. Hay que revisar *todas* las operaciones que aparecen, no solo la primera.

Las tres condiciones que más aparecen: un **denominador** no puede valer 0; una **raíz de índice par** no admite dentro un radicando negativo; y un **logaritmo** solo existe de números estrictamente positivos.

▪ Mirar solo el denominador deja fuera medio trabajo: hay funciones sin ninguna fracción cuyo dominio no es todo el conjunto de los números reales.

La **imagen** de un valor es lo que la función devuelve para él: la imagen de 2 es $f(2)$, y nada más: es el término técnico de la materia para el valor que sale al sustituir.

Función compuesta: $g[f(x)]$ quiere decir que se aplica primero f y luego g al resultado. ▲ El orden importa: $g[f(x)]$ y $f[g(x)]$ casi nunca son la misma función.

Función inversa: solo la tiene una función que no repita valores. Si dos x distintas dan la misma imagen, al despejar salen dos ramas —es lo que pasa con x^2 en todos los reales— y antes hay que restringir el dominio. Cumplido eso, se escribe $y = f(x)$, se despeja x y se intercambian los nombres: deshace lo que hace f , se comprueba aplicando las dos seguidas, y su dominio no tiene por qué ser el de f .

- 29 Halla el dominio de estas tres funciones: (a) $f(x) = (x + 1) / (x^2 - 9)$; (b) $g(x) = \sqrt{x - 2}$; (c) $h(x) = \log(5 - x)$.

Solución

El dominio son los valores de x para los que la fórmula tiene sentido. Cada tipo de función pone su propia condición, y hay que mirarlas todas, no solo la primera que se vea.

(a) Lo que estorba es que el denominador valga cero. $x^2 - 9 = 0$ en $x = 3$ y en $x = -3$, así que el dominio es **todos los reales menos el 3 y el -3**.

(b) Dentro de una raíz cuadrada no puede haber un número negativo, así que hace falta $x - 2 \geq 0$, es decir $x \geq 2$. El dominio es **[2, +∞)**. En $x = 2$ la raíz vale 0, que es legítimo.

(c) Un logaritmo solo existe de números estrictamente positivos, así que $5 - x > 0$, o sea $x < 5$. El dominio es **(-∞, 5)**.

▪ El apartado (b) enseña lo que hay que evitar: **no basta con mirar dónde se anula un denominador**. En (b) no hay ninguna fracción y aun así el dominio no es todo. La pregunta correcta es qué operaciones aparecen y qué exige cada una.

- 30 Con $f(x) = 2x - 3$ y $g(x) = x^2$, calcula $g[f(x)]$ y $f[g(x)]$, y comprueba en $x = 1$ que no son la misma función.

Solución

En $g[f(x)]$ se aplica primero f y después g : se mete $f(x)$ dentro de g . Queda $g(2x - 3) = (2x - 3)^2$, que desarrollado es $4x^2 - 12x + 9$.

En $f[g(x)]$ es al revés: primero g y después f . Queda $f(x^2) = 2x^2 - 3$.

En $x = 1$: $f(1) = -1$, y $g(-1) = 1$. Por el otro lado, $g(1) = 1$, y $f(1) = -1$. Así que **$g[f(1)] = 1$ y $f[g(1)] = -1$** .

Los dos resultados no solo son distintos: tienen signos opuestos. **Componer no es conmutativo**, y el orden cambia la función.

Para corregirte basta ese único valor: dos funciones que difieren en un punto ya son distintas. En $x = 0$ se vuelve a ver, con 9 por un lado y -3 por el otro. ▲ Lo que no vale es esperar que fallen en todos los valores: estas dos coinciden en $x = 3 + \sqrt{3}$ y en $x = 3 - \sqrt{3}$, y aun así son funciones distintas.

31

De la función definida por $f(x) = (2x + 1) / (x - 3)$, halla su inversa y comprueba lo que obtengas.

Solución

Se escribe $y = (2x + 1)/(x - 3)$ y se despeja x . Multiplicando por el denominador: $y(x - 3) = 2x + 1$, o sea $yx - 3y = 2x + 1$.

Se agrupan los términos con x a un lado: $yx - 2x = 3y + 1$, y sacando factor común, $x(y - 2) = 3y + 1$.

Despejando, $x = (3y + 1)/(y - 2)$. Ahora se cambian los nombres de las letras y queda $f^{-1}(x) = (3x + 1) / (x - 2)$.

Comprobación: $f(4) = 9/1 = 9$, y $f^{-1}(9) = 28/7 = 4$, que es donde se empezó. Con otro valor: $f(5) = 11/2$, y $f^{-1}(11/2) = (35/2)/(7/2) = 5$.

▲ Fíjate en un detalle que suele sorprender: f no existe en $x = 3$ y su inversa no existe en $x = 2$. **Una función y su inversa no tienen por qué tener el mismo dominio**: el 2 es precisamente el valor que f nunca alcanza.

Sucesiones y su límite

Lo que hay que saber

Una **sucesión** asigna un número a cada posición $n = 1, 2, 3, \dots$. El **término general** es la fórmula que los produce.

El **límite** es el valor hacia el que van los términos según n crece. En un cociente de polinomios en n manda el grado: si arriba y abajo es el mismo, el límite es el cociente de los coeficientes de mayor grado; si abajo es mayor, el límite es 0; si arriba es mayor, la sucesión se dispara.

Para saber **a partir de qué término** la sucesión se acerca al límite menos de una cantidad dada, se escribe la distancia al límite como una sola fracción y se resuelve la desigualdad.

Una sucesión está **acotada** si todos sus términos caben entre dos números fijos.

▪ Toda sucesión con límite **finito** está acotada, pero *no* al revés: una sucesión puede estar acotada y no tener límite, por ejemplo si va saltando entre dos valores. Y una que se dispara, como la que vale n en la posición n , no está acotada.

Con una **resta de dos cantidades que se disparan** no se puede concluir nada directamente. Si hay una raíz cuadrada, el camino es multiplicar y dividir por la misma expresión pero invirtiendo el signo que hay entre ellas.

32

Dada la sucesión de término general $a_n = (3n - 1) / (n + 2)$: (a) calcula a_1 y a_{10} ; (b) halla su límite; (c) di a partir de qué término la sucesión dista del límite menos de 0,01.

Solución

(a) $a_1 = (3 - 1)/(1 + 2) = 2/3$ y $a_{10} = (30 - 1)/(10 + 2) = 29/12$.

(b) Arriba y abajo el grado es 1, así que el límite es el cociente de los coeficientes que acompañan a n : **3**. Los términos se acercan a 3 por abajo, sin llegar nunca.

(c) La distancia al límite es $3 - a_n$. Haciendo la resta con denominador común: $(3(n + 2) - (3n - 1))/(n + 2) = 7/(n + 2)$.

Se pide $7/(n + 2) < 0,01$, o sea $n + 2 > 700$, es decir $n > 698$. El primero que lo cumple es **$n = 699$** .

Para corregirte, prueba el término de antes y el propio 699: con $n = 698$ la distancia es $7/700$, que es exactamente 0,01 y no *menos* de 0,01; con $n = 699$ es $7/701$, que ya es menor. La frontera cae justo donde debe.

33

Estudia la sucesión $a_n = (-1)^n \cdot n / (n + 1)$: escribe sus cuatro primeros términos y di si está acotada y si tiene límite.

Solución

Los cuatro primeros: $a_1 = -1/2$, $a_2 = 2/3$, $a_3 = -3/4$ y $a_4 = 4/5$. El factor $(-1)^n$ va cambiando el signo en cada paso.

Está acotada: el valor absoluto es $n/(n + 1)$, que siempre es menor que 1, porque el numerador es menor que el denominador. Todos los términos caen entre -1 y 1 .

No tiene límite. Los términos de lugar par se acercan a 1 y los de lugar impar, a -1 , y esos dos números distan 2 . Por muy lejos que se vaya, dos términos seguidos se quedan a más de $1,9$ de distancia uno del otro, así que no hay ningún número al que se acerquen todos.

▪ Este ejemplo desmiente una idea cómoda: **estar acotada no basta para tener límite**. Lo contrario sí vale —una sucesión con límite finito está siempre acotada—, pero no se puede leer al revés.

Para corregirte, calcula dos términos consecutivos altos, como el 100 y el 101 : salen $100/101$ y $-101/102$, uno positivo y otro negativo. Si te salieran los dos del mismo signo, habrías perdido el $(-1)^n$.

34

Calcula el límite de $\sqrt{n^2 + 3n} - n$ cuando n crece indefinidamente.

Solución

Los dos sumandos crecen sin tope, así que la resta no se puede calcular directamente: es una indeterminación. Cuando en la resta hay una raíz cuadrada, el camino que suele funcionar es multiplicar y dividir por lo mismo pero con el signo de en medio al revés, o sea por $\sqrt{n^2 + 3n} + n$.

Arriba queda $(n^2 + 3n) - n^2 = 3n$, que ya no tiene raíces. Abajo queda $\sqrt{n^2 + 3n} + n$.

Dividiendo arriba y abajo entre n , el cociente queda 3 dividido entre $\sqrt{1 + 3/n} + 1$. Al crecer n , $3/n$ se va a 0 , la raíz tiende a 1 y el denominador, a 2 : el límite es $3/2$.

Para corregirte con un número concreto: en $n = 100$, dentro de la raíz hay $10.000 + 300 = 10.300$. Como $101,48^2 = 10.298,1904$ y $101,49^2 = 10.300,2201$, esa raíz está entre $101,48$ y $101,49$, y al restarle 100 queda entre $1,48$ y $1,49$. Se está acercando a $1,5$.

▪ Lo que este ejercicio desmonta es la idea de que «infinito menos infinito es cero». Aquí la diferencia no se va a cero: se estabiliza en $1,5$. Dos cantidades pueden crecer las dos sin tope y mantener una diferencia fija.

Límites de funciones e indeterminaciones

Lo que hay que saber

El límite de $f(x)$ cuando x tiende a c describe a qué se acerca la función **cerca de c** , no lo que vale en c . Puede existir el límite aunque la función no esté definida ahí.

▪ Que el denominador tienda a 0 **no** implica que el límite falte. Si el numerador también tiende a 0, hay una indeterminación que casi siempre se resuelve.

Las dos salidas de un **0/0** en este curso: **factorizar** arriba y abajo y simplificar el factor que se anula, o **multiplicar por el conjugado** si hay una raíz cuadrada.

En los cocientes de polinomios de este curso, si el numerador tiende a un número distinto de 0 y el denominador tiende a 0, la función se dispara y hay una **asíntota vertical**. El signo lo decide el del denominador a cada lado del punto; un valor concreto a cada lado sirve de apoyo, no de demostración.

En el **infinito**, con cocientes de polinomios manda la comparación de grados, igual que en las sucesiones.

Los **límites laterales** son los que se calculan acercándose solo por la izquierda o solo por la derecha. El límite existe únicamente si los dos existen y coinciden.

35 Calcula el límite de $(x^2 - 4) / (x - 2)$ cuando x tiende a 2.

Solución

Al sustituir $x = 2$ salen 0 arriba y 0 abajo, así que no se puede leer el resultado directamente. Que el denominador tienda a cero *no* significa que no haya límite.

Se factoriza el numerador con la diferencia de cuadrados: $x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2)$.

El factor $(x - 2)$ se simplifica arriba y abajo —se puede, porque x se acerca a 2 pero no llega—, y queda simplemente $x + 2$.

Sustituyendo ahora, el límite es **4**.

Para corregirte con valores concretos, acércate por los dos lados: en $x = 1,9$ el cociente vale 3,9; en $x = 1,99$ vale 3,99; y en $x = 2,1$ vale 4,1. Fíjate en que en $x = 1,99$ el denominador vale $-0,01$, negativo y minúsculo, y aun así el cociente es perfectamente normal.

36 Calcula el límite de $(x^3 - 1) / (x^2 - 1)$ cuando x tiende a 1.

Solución

Otra vez sale 0/0 al sustituir, así que hay que factorizar. Los dos son diferencias de potencias con la raíz $x = 1$.

Arriba: $x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1)$. Abajo: $x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$.

Se simplifica $(x - 1)$ y queda $(x^2 + x + 1) / (x + 1)$. Ahora sí se puede sustituir.

Arriba sale $1 + 1 + 1 = 3$ y abajo, 2. El límite es **3/2**.

Para corregirte, prueba con $x = 1,01$: el cociente vale 30.301/20.100, que está entre 1,50 y 1,51. ▲ Si al factorizar no te aparece el factor $(x - 1)$ en los dos, revisa: tiene que aparecer, porque los dos se anulan en $x = 1$.

37 Calcula estos tres límites cuando x crece indefinidamente: (a) $(3x^2 - 5x) / (2x^2 + 7)$; (b) $(2x + 1) / (x^2 - 3)$; (c) $x^3 / (x + 1)$.

Solución

Con cocientes de polinomios en el infinito manda la comparación de grados, porque el término de mayor grado acaba dominando a todos los demás.

(a) Los dos grados son 2, así que el límite es el cociente de los coeficientes de mayor grado: **3/2**. Se ve con un número grande: en $x = 1.000$ el cociente vale 2.995.000/2.000.007, que está entre 1,49 y

1,50.

(b) Abajo el grado es mayor, así que el denominador crece mucho más deprisa y el cociente se va a 0. En $x = 1.000$ vale $2.001/999.997$, un número positivo y minúsculo.

(c) Arriba el grado es mayor, así que el cociente crece sin tope: el límite es $+\infty$. En $x = 1.000$ ya vale $1.000.000.000/1.001$.

▲ Para corregirte, mira siempre la diferencia de grados antes de hacer ninguna cuenta: mismo grado da un número, más grado abajo da 0 y más grado arriba se dispara. Si tu resultado no encaja con esa regla, algo se ha copiado mal.

38

Estudia los límites de $f(x) = (x + 1) / (x - 3)$ cuando x tiende a 3 por la izquierda y por la derecha.

Solución

Al sustituir $x = 3$ salen 4 arriba y 0 abajo. Eso no es una indeterminación: un numerador distinto de cero partido por algo que se hace minúsculo se dispara. Lo que falta por decidir es el signo.

Por la izquierda, x es un poco menor que 3, así que $x - 3$ es un número negativo y diminuto. Con el numerador cerca de 4, el cociente se va a $-\infty$. En $x = 2,9$ ya vale -39 , y en $x = 2,99$, -399 .

Por la derecha, $x - 3$ es positivo y diminuto, y el cociente se va a $+\infty$. En $x = 3,1$ vale 41, y en $x = 3,01$, 401.

Los dos límites laterales son distintos, así que **no existe el límite en $x = 3$** . Lo que sí hay es una **asíntota vertical** en $x = 3$.

▲ El signo es aquí el trabajo de verdad, y no se puede adivinar: hay que mirar si el denominador llega a cero por valores negativos o positivos. Dos números concretos, uno a cada lado, lo resuelven en diez segundos.

Continuidad y asíntotas

Lo que hay que saber

Una función es **continua en un punto** si se cumplen *tres* cosas: que exista $f(c)$, que exista el límite en c , y que los dos coincidan. Con que falle una, ya no lo es.

▪ Que los dos límites laterales existan y coincidan no basta: falta que la función esté definida ahí y valga exactamente eso.

Discontinuidad evitable: el límite existe, pero la función no está definida en el punto o vale otra cosa. Se arreglaría cambiando un solo valor.

Discontinuidad de salto finito: los dos límites laterales existen y son distintos. El salto es su diferencia, y no hay manera de arreglarla.

En una **función definida a trozos**, primero cada fórmula tiene que ser continua dentro de su tramo; hecho eso, lo que queda son los puntos donde cambia la fórmula, y ahí se comparan los dos límites laterales con el valor que la función tiene asignado.

Asíntota horizontal es el valor al que tiende la función en el infinito. ▲ Es una descripción de lo que pasa lejos, no una barrera: una función puede cortar su asíntota horizontal.

39

Halla el valor de a para que la función que vale $x^2 + 1$ cuando $x \leq 1$ y $3x - a$ cuando $x > 1$ sea continua en $x = 1$.

Solución

Para que una función sea continua en un punto hacen falta tres cosas: que exista el valor de la función ahí, que existan y coincidan los dos límites laterales, y que ese límite común sea el valor de la función.

Por la izquierda y en el propio punto manda el primer trozo: $1^2 + 1 = 2$. Así que $f(1) = 2$ y el límite por la izquierda también es 2.

Por la derecha manda el segundo trozo: $3 \cdot 1 - a = 3 - a$.

Igualando las dos, $3 - a = 2$, y de ahí $a = 1$. Con ese valor las tres condiciones se cumplen a la vez.

Para corregirte, calcula la función justo a los lados con $a = 1$: en $x = 0,99$ vale $0,9801 + 1 = 1,9801$ y en $x = 1,01$ vale $3,03 - 1 = 2,03$. Los dos rondan el 2, sin salto. ▲ Si hubieras tomado $a = 0$, en $x = 1,01$ saldría 3,03 y habría un salto de una unidad entera.

40

Clasifica la discontinuidad que tienen en el punto indicado estas dos funciones: (a) $g(x) = (x^2 - 1) / (x - 1)$ en $x = 1$; (b) $h(x) = |x - 2| / (x - 2)$ en $x = 2$.

Solución

(a) En $x = 1$ el denominador se anula, así que g no está definida ahí. Pero al factorizar, $(x - 1)(x + 1) / (x - 1)$ se simplifica en $x + 1$, cuyo valor en 1 es 2.

Los dos límites laterales valen 2: en $x = 0,99$ la función vale 1,99 y en $x = 1,01$ vale 2,01. Como el límite existe y lo único que falla es que la función no está definida, la discontinuidad es **evitable**: bastaría con decidir que $g(1) = 2$.

(b) En $x = 2$ el denominador también se anula, pero aquí el numerador es un valor absoluto. Para x menor que 2, $|x - 2| = -(x - 2)$, y el cociente vale -1 ; para x mayor que 2 vale $+1$.

Los dos límites laterales existen y son distintos, así que la discontinuidad es de **salto finito**, y el salto mide $1 - (-1) = 2$. No hay manera de arreglarla eligiendo un valor para $h(2)$.

▪ El apartado (a) avisa de lo que hay que mirar al clasificar: que los dos límites laterales existan y coincidan *no* hace continua a la función. Falta la tercera condición, que la función esté definida ahí y valga precisamente eso.

41

Halla las asíntotas de (a) $f(x) = (3x - 1) / (x + 2)$ y (b) $g(x) = 3x / (x^2 + 1)$, y di en cuál de las dos la función llega a tocar su asíntota horizontal.

Solución

(a) El denominador se anula en $x = -2$, y ahí el numerador vale -7 , distinto de cero: hay **asíntota vertical en $x = -2$** . Como arriba y abajo el grado es 1, el límite en el infinito es $3/1$, así que hay **asíntota horizontal en $y = 3$** . En $x = 1.000$ la función ya vale $2.999/1.002$, entre 2,99 y 3,00.

Esa f **nunca llega a valer 3**: igualar $(3x - 1)/(x + 2)$ a 3 lleva a $3x - 1 = 3x + 6$, o sea $-1 = 6$, que es imposible.

(b) Aquí el denominador $x^2 + 1$ no se anula para ningún valor real de x , así que **no hay asíntotas verticales**. Abajo el grado es mayor que arriba, así que hay **asíntota horizontal en $y = 0$** .

Y esta sí la toca: $g(0) = 0$, que es exactamente el valor de la asíntota. La función cruza su asíntota en el origen y después se va acercando a ella desde arriba: en $x = 1.000$ vale $3.000/1.000.001$, positivo y minúsculo.

▲ De ahí la advertencia: una asíntota horizontal describe el comportamiento *lejos*, no una barrera. Cortarla cerca del origen es perfectamente posible.

La derivada: definición y recta tangente

Lo que hay que saber

La **derivada** de f en el punto c es el límite, cuando h tiende a 0, de $[f(c + h) - f(c)] / h$. Mide lo deprisa que cambia la función justo ahí.

Ese cociente da 0/0 al sustituir. En los polinomios de este curso lo que lo resuelve es que, al desarrollar, el numerador tiene a h como factor y se simplifica con el denominador; con otras funciones el camino es otro.

Las derivadas que hacen falta aquí: la de una constante es 0, la de x es 1, la de x^n es $n \cdot x^{n-1}$, y la derivada de una suma es la suma de las derivadas.

Recta tangente a $y = f(x)$ en $x = c$: pasa por $(c, f(c))$ y tiene pendiente $f'(c)$. Su ecuación es $y - f(c) = f'(c)(x - c)$. ▲ Que una recta pase por el punto no prueba que sea la tangente: por ese punto pasan infinitas rectas.

El **signo** de la derivada indica si en ese punto la función crece o decrece: positiva, sube; negativa, baja. Donde la derivada se anula, la tangente es horizontal.

▪ Pero tangente horizontal no es lo mismo que máximo o mínimo. En las funciones de este curso lo decide que la derivada **cambie de signo** al pasar por ese punto: eso basta para afirmarlo, pero no es una regla universal. Y toda función derivable en un punto es continua ahí, aunque al revés no se cumpla.

- 42** Calcula la derivada de $f(x) = x^2 - 3x$ en $x = 2$ usando la definición, y contrasta después lo obtenido aplicando la regla de derivación.

Solución

La definición es el límite, cuando h tiende a 0, del cociente $[f(2 + h) - f(2)] / h$.

$f(2) = 4 - 6 = -2$. Y $f(2 + h) = (2 + h)^2 - 3(2 + h) = 4 + 4h + h^2 - 6 - 3h = h^2 + h - 2$.

La resta es $(h^2 + h - 2) - (-2) = h^2 + h$, y al dividir entre h queda $h + 1$. Aquí el h se simplifica, que es lo que resuelve la indeterminación.

Cuando h tiende a 0, $h + 1$ tiende a 1. Luego $f'(2) = 1$, y como es positiva, en $x = 2$ la función está subiendo.

Comprobación con la regla: $f'(x) = 2x - 3$, y $f'(2) = 4 - 3 = 1$. Coincide. Y con números: el cociente vale 1,1 con $h = 0,1$ y 1,01 con $h = 0,01$; con $h = -0,1$ vale 0,9. Se acerca a 1 por los dos lados.

- 43** Halla la recta tangente a $f(x) = x^3$ en el punto de abscisa $x = 1$, y averigua si esa recta vuelve a cortar a la curva en algún otro punto.

Solución

La derivada es $f'(x) = 3x^2$, luego la pendiente en $x = 1$ es $f'(1) = 3$. Y el punto de tangencia es $(1, 1)$, porque $1^3 = 1$.

La recta que pasa por $(1, 1)$ con pendiente 3 es $y - 1 = 3(x - 1)$, o sea $y = 3x - 2$.

Para buscar los cortes se igualan curva y recta: $x^3 = 3x - 2$, o sea $x^3 - 3x + 2 = 0$. Ese polinomio se factoriza como $(x - 1)^2(x + 2)$, lo que se comprueba desarrollando.

Las soluciones son $x = 1$, que aparece *dos* veces —ser tangente significa que ese factor aparece al menos dos veces; en otras curvas puede aparecer más—, y $x = -2$. En $x = -2$ la curva vale -8 y la recta, $3(-2) - 2 = -8$: coinciden. Así que **sí, la tangente vuelve a cortar la curva**, en $(-2, -8)$.

▪ Aquí caen dos ideas a la vez. La primera, que una tangente toca la curva en un solo punto: esta la corta en otro. La segunda, y más peligrosa, que un error de pendiente se detecta porque la recta no pasa por el punto: la recta $y = 5x - 4$, con la pendiente mal, **también pasa por $(1, 1)$** . Lo que la delata es que al igualarla con la curva el factor $(x - 1)$ aparece una sola vez, no dos.

44

Halla los puntos donde se anula la derivada de $f(x) = x^3 - 3x$ y di si son máximos o mínimos. Haz lo mismo con $g(x) = x^3$.

Solución

Para f : $f'(x) = 3x^2 - 3$, que se anula cuando $x^2 = 1$, es decir en $x = -1$ y $x = 1$.

El signo de la derivada alrededor de cada uno decide: $f'(-2) = 9$, positiva; $f'(0) = -3$, negativa; $f'(2) = 9$, positiva. Así que la función sube, baja y vuelve a subir.

Por tanto en $x = -1$ hay un **máximo local**, con $f(-1) = 2$, y en $x = 1$ hay un **mínimo local**, con $f(1) = -2$. Son locales y no absolutos: esta función crece sin tope por la derecha y baja sin tope por la izquierda.

Para g : $g'(x) = 3x^2$, que se anula solo en $x = 0$. Pero ahí no hay ni máximo ni mínimo: $g'(-1) = 3$ y $g'(1) = 3$, las dos positivas, así que la función sube antes y después. Sus valores en -1 , 0 y 1 son -1 , 0 y 1 , cada vez mayores.

▪ De ahí la conclusión: **que la derivada se anule no garantiza un máximo ni un mínimo**. La derivada nula dice que la tangente es horizontal, nada más. Quien decide es el cambio de signo de la derivada, y en g no lo hay.

45

Estudia si $f(x) = |x - 2|$ es continua y si es derivable en $x = 2$.

Solución

Continua sí lo es. $f(2) = 0$, y acercándose por los dos lados la función se acerca a 0: en $x = 1,99$ vale $0,01$ y en $x = 2,01$ también vale $0,01$. Valor y límites coinciden.

Para la derivada hay que mirar el cociente $[f(2 + h) - f(2)] / h$, que aquí es $|h| / h$.

Con h positivo, $|h| = h$ y el cociente vale **+1**: con $h = 0,1$ sale 1 . Con h negativo, $|h| = -h$ y el cociente vale **-1**: con $h = -0,1$ sale -1 , y con $h = -0,001$ sigue saliendo -1 .

Los dos cocientes se estabilizan en números distintos, así que ese límite no existe y **f no es derivable en $x = 2$** , aunque sea continua.

▪ Este es el contraejemplo que hay que tener a mano: **ser continua no implica ser derivable**. La implicación solo funciona en un sentido —toda función derivable en un punto es continua en él—, y al revés no vale: este valor absoluto lo demuestra.

Lo que hay que saber

Con dos variables medidas sobre los mismos individuos se trabaja con las **desviaciones respecto a la media** de cada una. La suma de los productos cruzados de esas desviaciones es la que mide si van juntas.

El **coeficiente de correlación** r vale entre -1 y 1 . Su signo es el de la suma cruzada, y su valor absoluto dice lo bien que se ajustan los datos a una recta. Su cuadrado, r^2 , se llama coeficiente de determinación.

▪ r mide relación **lineal**, y solo eso. Un valor 0 no significa que las dos variables no tengan nada que ver: puede haber una relación perfecta que no sea una recta. Y una r alta tampoco significa que una variable cause la otra.

Hay **dos rectas de regresión**, una para estimar y a partir de x y otra al revés. Las dos contienen el punto formado por ambas medias, y solo coinciden cuando el ajuste es perfecto. ▲ El producto que vale r^2 es el de los dos coeficientes tal como se calculan, el de y sobre x por el de x sobre y . ▪ No es el de las dos pendientes que quedan cuando se despeja la y en una y en otra.

Regla de Laplace: el cociente entre los resultados que interesan y todos los que pueden darse, siempre que ninguno tenga más opciones de salir que otro. En este curso esos resultados se cuentan con **combinaciones** cuando el orden no importa.

Para un suceso del tipo «al menos uno» suele salir mucho más corto contar el contrario —«ninguno»— y restar de 1 . ▲ Y el recuento se valida sumando todos los casos posibles: tienen que dar el total.

46

Cinco alumnos han dedicado a estudiar 1, 2, 3, 4 y 5 horas y han sacado, respectivamente, 3, 5, 4, 8 y 10 puntos. (a) Calcula el coeficiente de correlación. (b) Ajusta la recta que estima la nota a partir de las horas. (c) Ajusta la que estima las horas a partir de la nota y di si coincide con la anterior.

Solución

Se empieza por las medias: la de las horas es $15/5 = 3$ y la de las notas, $30/5 = 6$. Las desviaciones respecto a esas medias son $-2, -1, 0, 1, 2$ para las horas y $-3, -1, -2, 2, 4$ para las notas.

(a) Con esas desviaciones: la suma de los productos cruzados es $6 + 1 + 0 + 2 + 8 = 17$; la suma de los cuadrados de las horas, $4 + 1 + 0 + 1 + 4 = 10$; y la de los cuadrados de las notas, $9 + 1 + 4 + 4 + 16 = 34$. El coeficiente al cuadrado es $17^2/(10 \cdot 34) = 0,85$, y como la suma cruzada es positiva, r es positivo: está entre $0,92$ y $0,93$.

(b) La pendiente de la nota sobre las horas es $17/10 = 1,7$, y la recta pasa por el punto de las dos medias, $(3, 6)$: $y = 6 + 1,7(x - 3)$, o sea $y = 1,7x + 0,9$.

(c) El coeficiente de las horas sobre la nota es $17/34 = 0,5$, y esa recta es $x = 3 + 0,5(y - 6)$, o sea $x = 0,5y$. Despejada en y queda $y = 2x$.

No son la misma recta: una tiene pendiente $1,7$ y la otra, 2 . Solo coincidirían si el ajuste fuera perfecto. Para corregirte, multiplica los dos coeficientes tal como han salido —el $1,7$ que estima la nota con las horas y el $0,5$ que estima las horas con la nota—: $1,7 \cdot 0,5 = 0,85$, que es exactamente el coeficiente al cuadrado del apartado (a). Y comprueba que las dos pasan por $(3, 6)$. ▲ Ojo: no son las pendientes que quedan al despejar la nota en una y en otra, porque $1,7 \cdot 2$ no da $0,85$.

47

Cinco puntos tienen coordenadas $(-2, 4)$, $(-1, 1)$, $(0, 0)$, $(1, 1)$ y $(2, 4)$. Calcula su coeficiente de correlación y di qué relación hay entre las dos variables.

Solución

La media de las x es 0 y la de las y es $(4 + 1 + 0 + 1 + 4)/5 = 2$. Las desviaciones de x son $-2, -1, 0, 1, 2$ y las de y son $2, -1, -2, -1, 2$.

Los productos cruzados son $-4, 1, 0, -1$ y 4 . Su suma es **exactamente 0**, así que el coeficiente de correlación vale **$r = 0$** .

Y sin embargo la relación entre las dos variables es **perfecta**: cada y es el cuadrado de su x . Con la x se acierta la y sin ningún margen de error.

Lo que mide r es la relación *lineal*, la que se puede resumir con una recta. Aquí los puntos forman una curva simétrica, y la recta que mejor se les ajusta es horizontal.

▪ Por eso no se puede leer « $r = 0$ » como «estas variables no tienen nada que ver». Dice algo más modesto: que **una recta no sirve** para describirlas.

48

En una clase de **12 alumnos**, de los cuales **5 son chicas** y **7 son chicos**, se eligen **3 al azar** para una comisión. (a) ¿Cuántas comisiones distintas se pueden formar? (b) ¿Con qué probabilidad resulta una comisión formada solo por chicas? (c) ¿Y con qué probabilidad habrá al menos una chica?

Solución

(a) El orden en que se eligen no importa, así que se cuentan combinaciones de 12 elementos tomados de 3 en 3: $(12 \cdot 11 \cdot 10) / (3 \cdot 2 \cdot 1) = 1.320/6 = \mathbf{220 \text{ comisiones}}$.

(b) Las comisiones formadas solo por chicas son las combinaciones de 5 tomadas de 3 en 3: $(5 \cdot 4 \cdot 3)/6 = \mathbf{10}$. Por la regla de Laplace, la probabilidad es $10/220 = \mathbf{1/22}$.

(c) «Al menos una» se cuenta por el camino contrario, que es mucho más corto: las comisiones sin ninguna chica son las de 3 chicos, $(7 \cdot 6 \cdot 5)/6 = \mathbf{35}$. Su probabilidad es $35/220$, y la que se pide es $1 - 35/220 = \mathbf{37/44}$.

Para corregirte, cuenta los cuatro casos posibles por separado y comprueba que suman el total: 3 chicas, 10; 2 chicas y 1 chico, $10 \cdot 7 = 70$; 1 chica y 2 chicos, $5 \cdot 21 = 105$; y 0 chicas, 35. En total $10 + 70 + 105 + 35 = 220$, que son todas las comisiones.

▲ Si al sumar los casos no te sale el total, hay un recuento mal hecho, y eso se nota antes de calcular ninguna probabilidad.