

Ejercicios Resueltos Matemáticas 2 de Bachillerato 2026 / 2027

46 ejercicios con la solución explicada paso a paso, y la teoría de los 13 temas que trae esta selección.

Lo que vas a practicar

Matrices: operaciones, potencias y matriz inversa · Multiplicar matrices en los dos órdenes, encontrar el patrón de una potencia y despejar una incógnita matricial (**ejercicios 1, 2, 3**)

Determinantes y rango de una matriz · Calcular un determinante de orden tres, usar sus propiedades sin repetir la cuenta y decidir el rango cuando hay una letra (**ejercicios 4, 5, 6**)

Sistemas de ecuaciones lineales y discusión con parámetro · Resolver por eliminación y por determinantes, discutir un sistema con una letra y entender qué pasa cuando el determinante se anula (**ejercicios 7, 8, 9, 10**)

Vectores en el espacio: productos escalar, vectorial y mixto · Decidir si dos vectores son perpendiculares, hallar un vector perpendicular a otros dos y medir un volumen con un determinante (**ejercicios 11, 12, 13**)

La recta y el plano en el espacio · Escribir la recta que pasa por dos puntos, el plano que pasa por tres y decidir cómo se sitúan dos rectas o una recta y un plano (**ejercicios 14, 15, 16, 17**)

Distancias y ángulos en el espacio · Medir lo que separa un punto de un plano o de una recta y el ángulo que forman dos planos (**ejercicios 18, 19, 20**)

Límites, continuidad y asíntotas · Deshacer indeterminaciones, ajustar un parámetro para que una función no se rompa y localizar las rectas a las que se acerca (**ejercicios 21, 22, 23, 24**)

Derivadas y derivabilidad · Derivar cocientes y composiciones, derivar una igualdad sin despejar y ajustar parámetros para que no haya quiebro (**ejercicios 25, 26, 27, 28**)

Aplicaciones de la derivada: monotonía, extremos y optimización · Localizar máximos y mínimos, decidir hacia dónde se curva una función y resolver un problema en el que hay que elegir la mejor opción (**ejercicios 29, 30, 31, 32**)

Integral indefinida: cálculo de primitivas · Integrar lo inmediato, reconocer cuándo un cambio de variable lo convierte en inmediato e integrar un producto por partes (**ejercicios 33, 34, 35**)

Integral definida, áreas y volúmenes · Aplicar la regla de Barrow, medir un recinto que cruza el eje, medir el que queda entre dos curvas y calcular un volumen de revolución (**ejercicios 36, 37, 38, 39**)

Probabilidad condicionada, total y Bayes · Distinguir independencia de incompatibilidad, repartir un total entre varias procedencias y dar la vuelta a una condicionada (**ejercicios 40, 41, 42**)

Distribuciones binomial y normal · Contar éxitos en un número fijo de intentos, pasar al suceso contrario cuando hay muchos casos y tipificar una variable continua (**ejercicios 43, 44, 45, 46**)

Material propio de solucionario.es. Los enunciados y las soluciones están escritos por nosotros. La versión al día, con más ejercicios y de todos los cursos, está siempre en:

solucionario.es

Qué entra aquí y qué no. En 2º de Bachillerato hay **dos** asignaturas de matemáticas distintas, y esta página cubre **Matemáticas II**, la de la modalidad de **Ciencias y Tecnología**. ■ **No está pensada para Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II**, que es otra asignatura y no una versión más fácil de esta: quien la curse encontrará aquí geometría del espacio, vectores, determinantes y volúmenes de revolución, que no figuran en el listado oficial de saberes de esa asignatura, y en cambio **no encontrará** la programación lineal, las técnicas de muestreo, la estimación ni los intervalos de confianza, que sí figuran en ese listado. Entran los trece temas del cuadro: matrices, determinantes y rango, sistemas de ecuaciones lineales con parámetro, vectores en el espacio, la recta y el plano, distancias y ángulos, límites y continuidad con asíntotas, derivadas y derivabilidad, aplicaciones de la derivada con optimización, integral indefinida, integral definida con áreas y volúmenes, probabilidad condicionada con el teorema de Bayes, y las distribuciones binomial y normal. De los límites entran las indeterminaciones que se deshacen factorizando, por el conjugado o comparando grados. **Quedan fuera a propósito:** la descomposición en fracciones simples, que sí es de este curso y se deja fuera por una decisión de alcance; y las ecuaciones diferenciales, las integrales impropias y los polinomios de Taylor, que esos sí son de después del Bachillerato. Se da por sabido lo de 1º: los números complejos, la trigonometría, la geometría analítica del plano, los logaritmos y la definición de derivada. Todo se resuelve con lápiz, papel y una calculadora corriente. Esto sirve para localizar lo que flojea; no sustituye al libro ni a las clases.

Matrices: operaciones, potencias y matriz inversa

Lo que hay que saber

Una **matriz** es un cuadro de números con filas y columnas. Aquí se escribe entre paréntesis y con **punto y coma entre las filas**: $(2 \ -1; \ 3 \ 0)$ tiene primera fila 2 y -1 , y segunda fila 3 y 0. ▲ Ese punto y coma separa filas y no significa otra cosa.

Para **multiplicar**, la casilla de la fila i y la columna j sale de emparejar la fila i del primer factor con la columna j del segundo, multiplicando término a término y sumando. Por eso el producto solo se puede hacer si el primer factor tiene tantas columnas como filas el segundo.

La **matriz unidad** lleva unos en la diagonal principal y ceros en el resto, y multiplicar por ella deja la matriz igual. Es el papel que el 1 hace con los números.

Una **potencia** A^n es multiplicar A por sí misma n veces. Cuando se busca una fórmula general conviene calcular las tres primeras, conjeturar el patrón y *comprobar el paso de n a $n + 1$* : sin esa comprobación es una sospecha, no una fórmula.

La **matriz inversa** A^{-1} es la que cumple $A \cdot A^{-1} =$ matriz unidad. Para orden 2, se intercambian los dos elementos de la diagonal principal, se cambia el signo a los otros dos y se divide todo entre el determinante.

▪ Una matriz con **determinante cero no tiene inversa**: habría que dividir entre cero. Y en una ecuación matricial hay que multiplicar por la inversa *por el mismo lado* en los dos miembros; cuál sea ese lado lo decide dónde esté la incógnita.

- 1 Con $A = (2 \ -1; \ 3 \ 0)$ y $B = (1 \ 4; \ -2 \ 5)$, calcula $A \cdot B$ y $B \cdot A$, y di qué se deduce de compararlos.

Solución

Cada casilla del producto sale de una fila del primer factor y una columna del segundo: se emparejan término a término y se suma.

$A \cdot B$: la casilla de arriba a la izquierda es $2 \cdot 1 + (-1) \cdot (-2) = 4$; la de arriba a la derecha, $2 \cdot 4 + (-1) \cdot 5 = 3$; la de abajo a la izquierda, $3 \cdot 1 + 0 \cdot (-2) = 3$; y la de abajo a la derecha, $3 \cdot 4 + 0 \cdot 5 = 12$.

Queda $A \cdot B = (4 \ 3; \ 3 \ 12)$.

$B \cdot A$: $1 \cdot 2 + 4 \cdot 3 = 14$; $1 \cdot (-1) + 4 \cdot 0 = -1$; $(-2) \cdot 2 + 5 \cdot 3 = 11$; $(-2) \cdot (-1) + 5 \cdot 0 = 2$. Queda $B \cdot A = (14 \ -1; \ 11 \ 2)$.

Los dos resultados son matrices 2×2 y **no coinciden en ninguna de las cuatro casillas**. ▲ De ahí sale lo que hay que llevarse: el orden de los factores cambia el producto de matrices, así que $A \cdot B$ y $B \cdot A$ son cuentas distintas y hay que hacer la que pida el enunciado.

Para corregirte, suma los elementos de la diagonal de cada resultado: $4 + 12 = 16$ y $14 + 2 = 16$. Esa suma sí coincide en los dos órdenes, y si te sale distinta hay un error en alguna casilla. Cuidado: que coincida no garantiza que todo esté bien, porque las casillas de fuera de la diagonal no entran en esa suma y dos errores dentro de ella pueden compensarse; sirve para descartar, no para confirmar.

- 2 Sea $M = (1 \ 1; \ 0 \ 1)$. Calcula M^2 y M^3 , escribe cuánto vale M^n y úsalo para dar M^{50} .

Solución

$M^2 = M \cdot M$. La primera fila del producto es $(1 \cdot 1 + 1 \cdot 0, 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1) = (1, 2)$, y la segunda, $(0, 1)$. Es decir $M^2 = (1 \ 2; \ 0 \ 1)$.

$M^3 = M^2 \cdot M$. La primera fila sale $(1 \cdot 1 + 2 \cdot 0, 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1) = (1, 3)$ y la segunda se queda igual: $M^3 = (1 \ 3; \ 0 \ 1)$.

El patrón se ve en la única casilla que se mueve: en M hay un 1, en M^2 un 2 y en M^3 un 3. La conjetura es $M^n = (1 \ n; \ 0 \ 1)$.

Y se demuestra en un renglón, no se deja en conjetura: si $M^n = (1 \ n; 0 \ 1)$, entonces $M^n \cdot M$ tiene en esa casilla $n \cdot 1 + 1 \cdot 1 = n + 1$, que es exactamente lo que la fórmula predice para el exponente siguiente. Como vale para $n = 1$, vale para todos.

Por tanto $M^{50} = (1 \ 50; 0 \ 1)$. ▲ Una conjetura sacada de tres casos no es una demostración: aquí se ha comprobado que el paso de n a $n + 1$ funciona, y eso es lo que la convierte en fórmula.

3

Con $A = (2 \ 1; 5 \ 3)$ y $C = (1 \ 0; 2 \ 1)$: (a) halla A^{-1} ; (b) resuelve la ecuación $A \cdot X = C$.

Solución

(a) Para una matriz 2×2 hay fórmula: se cambian de sitio los dos elementos de la diagonal principal, se cambia el signo a los otros dos y se divide todo entre el determinante.

El determinante de A es $2 \cdot 3 - 1 \cdot 5 = 1$. Como no es cero, A tiene inversa, y al dividir entre 1 no cambia nada: $A^{-1} = (3 \ -1; -5 \ 2)$.

Para asegurarlo, multiplica: $A \cdot A^{-1}$ tiene arriba a la izquierda $2 \cdot 3 + 1 \cdot (-5) = 1$ y arriba a la derecha $2 \cdot (-1) + 1 \cdot 2 = 0$; abajo salen $5 \cdot 3 + 3 \cdot (-5) = 0$ y $5 \cdot (-1) + 3 \cdot 2 = 1$. Sale la matriz unidad, que es lo que tenía que salir.

(b) En $A \cdot X = C$ la incógnita está multiplicada *por la izquierda*, así que se multiplican los dos lados por A^{-1} también por la izquierda: $A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot C$, y como $A^{-1} \cdot A$ es la unidad, queda $X = A^{-1} \cdot C$.

$X = (3 \ -1; -5 \ 2) \cdot (1 \ 0; 2 \ 1)$. Primera fila: $3 \cdot 1 + (-1) \cdot 2 = 1$ y $3 \cdot 0 + (-1) \cdot 1 = -1$. Segunda: $(-5) \cdot 1 + 2 \cdot 2 = -1$ y $(-5) \cdot 0 + 2 \cdot 1 = 2$. Queda $X = (1 \ -1; -1 \ 2)$.

Para corregirte, deshaz el despeje: $A \cdot X$ tiene que devolver C . Primera fila: $2 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) = 1$ y $2 \cdot (-1) + 1 \cdot 2 = 0$; segunda: $5 \cdot 1 + 3 \cdot (-1) = 2$ y $5 \cdot (-1) + 3 \cdot 2 = 1$. Sale $(1 \ 0; 2 \ 1)$, que es C .

Determinantes y rango de una matriz

Lo que hay que saber

El **determinante** es un número asociado a una matriz cuadrada. En orden 2 es el producto de la diagonal principal menos el de la otra. En orden 3 se puede desarrollar por cualquier fila o por cualquier columna.

Desarrollar por una línea es multiplicar cada elemento por el determinante que queda al tapar su fila y su columna, con el signo que le toca a esa posición: la primera fila va $+$ $-$ $+$ y la segunda va $-$ $+$ $-$, porque el signo es el de (-1) elevado a la suma del número de fila y el de columna.

Tres propiedades que ahorran cuentas: multiplicar **una** fila por un número multiplica el determinante por ese número; el determinante de un **producto** de matrices es el producto de los determinantes; y si una fila es combinación de las otras, el determinante vale cero.

▪ **Sumar dos matrices no se traduce en sumar sus determinantes.** El de $A + B$ no tiene por qué coincidir con esa suma, y darlo por bueno arrastra el fallo hasta el final, porque el resto de la cuenta puede estar impecable.

El **rango** de una matriz es el orden del mayor determinante no nulo que se puede sacar de ella eligiendo filas y columnas. Se busca de arriba abajo: si el grande no se anula, ya está; si se anula, se baja un orden.

Con una **letra dentro**, el rango *puede* depender de ella y hay que averiguarlo: se calcula el determinante grande, se mira para qué valores de la letra se anula, y esos valores se estudian aparte, uno por uno. Si no se anula para ninguno, el rango es el mismo sea cual sea la letra.

4

Calcula el determinante de $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \end{pmatrix}$ desarrollando por la primera fila, y comprueba el resultado por otro camino.

Solución

Desarrollar por una fila es multiplicar cada elemento por el determinante que queda al tapar su fila y su columna, alternando los signos $+$ $-$ $+$.

El primer sumando es $1 \cdot (1 \cdot 0 - 4 \cdot 6) = 1 \cdot (-24) = -24$. El segundo lleva signo menos: $-2 \cdot (0 \cdot 0 - 4 \cdot 5) = -2 \cdot (-20) = 40$. El tercero, $+3 \cdot (0 \cdot 6 - 1 \cdot 5) = 3 \cdot (-5) = -15$.

Sumando: $-24 + 40 - 15 = 1$.

La comprobación se hace por un camino distinto, no repitiendo el mismo. Por la regla de los productos cruzados de orden tres, los tres términos con signo más son $1 \cdot 1 \cdot 0 = 0$, $2 \cdot 4 \cdot 5 = 40$ y $3 \cdot 0 \cdot 6 = 0$; los tres con signo menos son $3 \cdot 1 \cdot 5 = 15$, $1 \cdot 4 \cdot 6 = 24$ y $2 \cdot 0 \cdot 0 = 0$. Queda $(0 + 40 + 0) - (15 + 24 + 0) = 1$.

▲ Si los dos caminos te dan lo mismo, el resultado es fiable; si te dan distinto, el primer sitio donde mirar es el segundo sumando del desarrollo, que es el que lleva el signo cambiado, porque un signo invertido ahí desplaza el total sin romper nada más.

5

De una matriz cuadrada A de orden 3 se sabe que su determinante vale 5. Calcula, sin conocer A : (a) el determinante de $2A$; (b) el de A^2 ; (c) el de A^{-1} ; (d) el de la traspuesta de A .

Solución

(a) Multiplicar toda la matriz por 2 es multiplicar por 2 *cada una de las tres filas*, y cada fila multiplicada por un número multiplica el determinante por ese número. Son tres veces: $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 = 40$.

(b) El determinante de un producto es el producto de los determinantes, así que el de A^2 es $5 \cdot 5 = 25$.

(c) $A \cdot A^{-1}$ es la matriz unidad, cuyo determinante vale 1. Tomando determinantes en esa igualdad, $5 \cdot (\text{determinante de } A^{-1}) = 1$, así que vale $1/5$.

(d) Trasponer es cambiar las filas por las columnas. Como el determinante se puede desarrollar igual por una fila que por una columna, desarrollar la traspuesta por su primera fila es exactamente desarrollar A por su primera columna: el resultado es el mismo número. Vale 5.

▲ La trampa está en (a): el 2 no sale fuera una vez, sale una vez por cada fila. En orden 3 son $2^3 = 8$, y por eso $8 \cdot 5 = 40$ y no 10. Si trabajas con una matriz de otro orden, el exponente cambia con él.

6

Estudia el rango de $N = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & k \end{pmatrix}$ según los valores de k .

Solución

El rango es el orden del mayor determinante no nulo que se pueda sacar de la matriz, así que se empieza por el más grande: el de orden 3.

Desarrollando por la primera fila: $1 \cdot (2k - 12) - 1 \cdot (k - 3) + 1 \cdot (4 - 2) = 2k - 12 - k + 3 + 2 = k - 7$.

Ese determinante se anula solo cuando $k = 7$. Por tanto, si k es distinto de 7 el determinante no es cero y el **rango es 3**.

Si $k = 7$, el determinante de orden 3 vale cero y hay que bajar a orden 2. Tomando las dos primeras filas y las dos primeras columnas queda $1 \cdot 2 - 1 \cdot 1 = 1$, que no es cero, así que el **rango es 2**.

Para corregirte, sustituye $k = 7$ en N y mira las filas: la tercera es $(1 \ 4 \ 7)$, y resulta ser la primera más tres veces la diferencia entre la segunda y la primera. Una fila que se obtiene de las otras dos es justo lo que significa que el rango baje a 2.

Sistemas de ecuaciones lineales y discusión con parámetro

Lo que hay que saber

Un sistema lineal tiene dos matrices: la de **coeficientes**, con lo que multiplica a las incógnitas, y la **ampliada**, que le añade la columna de los términos independientes.

El **teorema de Rouché-Frobenius** decide con los rangos. Si los dos rangos son distintos, el sistema no tiene solución. Si coinciden y valen lo mismo que el número de incógnitas, hay una sola. Y si coinciden pero son menores, hay infinitas.

El método de los **determinantes** se usa cuando hay tantas ecuaciones como incógnitas, que es cuando la matriz de coeficientes es cuadrada y tiene determinante: cada incógnita es el determinante que resulta de sustituir su columna por la de términos independientes, dividido entre el determinante de los coeficientes. ■ Solo vale si ese denominador no es cero.

El método de **eliminación** no tiene esa restricción: se combinan ecuaciones para ir quitando incógnitas. Sumar a una ecuación un múltiplo de otra no cambia las soluciones.

Un sistema es **homogéneo** cuando todos los términos independientes son cero. La terna de ceros lo cumple, así que la pregunta útil no es si tiene solución, sino si tiene alguna más.

Cuando hay un **parámetro**, el trabajo es en dos fases: primero los valores que anulan el determinante de los coeficientes, y después cada uno de esos valores sustituido en el sistema y estudiado por separado.

7

Resuelve por eliminación el sistema $x + y + z = 6$, $x - y + 2z = 5$, $2x + y - z = 1$.

Solución

La idea es ir quitando incógnitas restando ecuaciones, hasta quedarse con una sola.

Restando la primera ecuación de la segunda desaparece la x : $(x - y + 2z) - (x + y + z) = 5 - 6$, o sea $-2y + z = -1$.

Restando el doble de la primera de la tercera vuelve a desaparecer la x : $(2x + y - z) - 2(x + y + z) = 1 - 12$, o sea $-y - 3z = -11$, que se escribe mejor como $y + 3z = 11$.

De la primera de esas dos, $z = 2y - 1$. Sustituyendo en la segunda: $y + 3(2y - 1) = 11$, es decir $7y = 14$ y por tanto $y = 2$. Entonces $z = 2 \cdot 2 - 1 = 3$ y, de la ecuación de partida, $x = 6 - 2 - 3 = 1$.

Para corregirte, sustituye (1, 2, 3) en las tres ecuaciones originales, no solo en la que usaste al final: $1 + 2 + 3 = 6$; $1 - 2 + 6 = 5$; $2 + 2 - 3 = 1$. Las tres cuadran.

8

Resuelve por determinantes el sistema $x + 2y + z = 1$, $2x - y + z = 2$, $x + y - z = 0$.

Solución

Primero el determinante de los coeficientes, que es el que autoriza el método: $1 \cdot (1 - 1) - 2 \cdot (-2 - 1) + 1 \cdot (2 + 1) = 0 + 6 + 3 = 9$. Como no es cero, el sistema tiene solución única y se puede seguir.

Para la x se cambia la primera columna por los términos independientes: el determinante de $(1 \ 2 \ 1; 2 \ -1 \ 1; 0 \ 1 \ -1)$ es $1 \cdot (1 - 1) - 2 \cdot (-2 - 0) + 1 \cdot (2 - 0) = 0 + 4 + 2 = 6$, y $x = 6/9 = 2/3$.

Para la y se cambia la segunda columna: el determinante de $(1 \ 1 \ 1; 2 \ 2 \ 1; 1 \ 0 \ -1)$ es $1 \cdot (-2 - 0) - 1 \cdot (-2 - 1) + 1 \cdot (0 - 2) = -2 + 3 - 2 = -1$, y $y = -1/9$.

Para la z se cambia la tercera: el determinante de $(1 \ 2 \ 1; 2 \ -1 \ 2; 1 \ 1 \ 0)$ es $1 \cdot (0 - 2) - 2 \cdot (0 - 2) + 1 \cdot (2 + 1) = -2 + 4 + 3 = 5$, y $z = 5/9$.

Para corregirte, sustituye en la tercera ecuación, que es la que no has usado para nada salvo como fila: $2/3 - 1/9 - 5/9 = 6/9 - 1/9 - 5/9 = 0$. Cuadra. ▲ Cumplir una sola de las tres ecuaciones no basta para dar la terna por buena: hay ternas equivocadas que cumplen una. Para estar seguro hay que sustituir en las tres.

9

Discute, según los valores de a , el sistema $ax + y + z = 1$, $x + ay + z = a$, $x + y + az = a^2$.

Solución

El determinante de los coeficientes es $a \cdot (a^2 - 1) - 1 \cdot (a - 1) + 1 \cdot (1 - a) = a^3 - a - a + 1 + 1 - a = a^3 - 3a + 2$, que se factoriza como $(a - 1)^2(a + 2)$.

Si a es distinto de 1 y de -2 , ese determinante no es cero: el sistema tiene **solución única**.

Si $a = 1$, las tres ecuaciones se convierten en $x + y + z = 1$, $x + y + z = 1$ y $x + y + z = 1$: son la misma. Queda una sola condición para tres incógnitas, así que hay **infinitas soluciones**, con dos de ellas libres.

Si $a = -2$, las ecuaciones son $-2x + y + z = 1$, $x - 2y + z = -2$ y $x + y - 2z = 4$. Sumándolas las tres, la izquierda se anula entera y la derecha da $1 - 2 + 4 = 3$. Quedaría, por tanto, que cero vale tres, y eso es imposible: **no tiene solución**.

▪ Fíjate en lo que acaba de pasar, porque es donde se tuerce el tema: el determinante vale cero en los dos casos, y sin embargo uno tiene infinitas soluciones y el otro ninguna. Que el determinante se anule *no* significa que el sistema no tenga solución; significa solo que la solución no es única, y hay que mirar cuál de los dos casos es.

10

Resuelve $x + 2y - z = 0$, $2x - y + 3z = 0$, $3x + y + 2z = 0$, y di cuántas soluciones tiene.

Solución

Los tres términos independientes son cero, así que $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ cumple las tres ecuaciones de entrada. Un sistema así no puede quedarse sin solución; lo que hay que averiguar es si tiene alguna más.

El determinante de los coeficientes es $1 \cdot (-2 - 3) - 2 \cdot (4 - 9) + (-1) \cdot (2 + 3) = -5 + 10 - 5 = 0$. Como se anula, la solución no es única y hay más.

Para encontrarlas, de la primera ecuación $x = z - 2y$. Sustituyendo en la segunda: $2(z - 2y) - y + 3z = 0$, es decir $5z - 5y = 0$, o sea $z = y$. Y entonces $x = y - 2y = -y$.

Las soluciones son, por tanto, todas las de la forma $(-t, t, t)$ con t cualquier número: infinitas, todas proporcionales entre sí. Con $t = 0$ se recupera la solución de ceros.

Para corregirte, sustituye la de $t = 1$, que es $(-1, 1, 1)$, en la tercera ecuación, que es la que no has usado: $3 \cdot (-1) + 1 + 2 \cdot 1 = 0$. Cuadra.

Vectores en el espacio: productos escalar, vectorial y mixto

Lo que hay que saber

El **producto escalar** de dos vectores se obtiene multiplicando coordenada con coordenada y sumando los tres resultados; lo que sale es un *número*. El **módulo** de un vector se saca elevando al cuadrado sus tres coordenadas, sumándolas y extrayendo después la raíz.

El **coseno del ángulo** que forman dos vectores no nulos se halla dividiendo su producto escalar entre los dos módulos multiplicados. De ahí sale el criterio corto: dos vectores no nulos son **perpendiculares** exactamente cuando su producto escalar vale cero.

El **producto vectorial** de dos vectores da otro *vector*, perpendicular a los dos. Cada coordenada suya se obtiene cruzando las otras dos: la primera es $u_2v_3 - u_3v_2$, la segunda es $u_3v_1 - u_1v_3$ y la tercera es $u_1v_2 - u_2v_1$.

Su **módulo** mide el área del paralelogramo que forman los dos vectores, así que el área del triángulo que determinan es la mitad. ▲ Cambiar el orden de los factores devuelve el mismo vector con el sentido cambiado, salvo cuando ese producto sale el vector cero —lo que pasa si los dos factores son proporcionales—, porque el vector cero no tiene sentido.

El **producto mixto** de tres vectores es el determinante de sus coordenadas por filas. Su valor absoluto es el volumen del paralelepípedo que forman, y el del tetraedro con esas tres aristas es la sexta parte.

Si el producto mixto vale **cero**, los tres vectores caben en un mismo plano: se llaman coplanarios. Es el criterio con el que se separan las rectas que se cortan de las que se cruzan.

- 11** Con $\mathbf{u} = (1, 2, -1)$ y $\mathbf{v} = (3, -1, 1)$, halla su producto escalar, deduce de él qué ángulo forman y mide después el módulo de cada uno.

Solución

El producto escalar se hace multiplicando coordenada con coordenada y sumando: $1 \cdot 3 + 2 \cdot (-1) + (-1) \cdot 1 = 3 - 2 - 1 = 0$.

Para el ángulo se divide ese 0 entre los dos módulos multiplicados. Como el numerador es cero y ninguno de los módulos lo es, el coseno vale 0 y el ángulo es **90°**: los dos vectores son **perpendiculares**.

Cada módulo sale elevando al cuadrado las tres coordenadas, sumando y sacando la raíz. Para $\mathbf{u}$: $1 + 4 + 1 = 6$, así que el módulo es $\sqrt{6}$. Para $\mathbf{v}$: $9 + 1 + 1 = 11$, así que es $\sqrt{11}$.

▪ Y conviene fijarse en lo que este ejercicio descarta: el producto escalar ha salido cero con *los dos vectores distintos del vector cero*, porque sus módulos valen $\sqrt{6}$ y $\sqrt{11}$. Con números corrientes, un producto nulo obliga a que un factor sea cero; con el producto escalar, no: lo que dice es que forman ángulo recto.

Para corregirte, cambia el orden y vuelve a multiplicar: $3 \cdot 1 + (-1) \cdot 2 + 1 \cdot (-1) = 0$. El producto escalar no depende del orden, así que si te sale distinto es que has emparejado mal alguna coordenada.

- 12** Halla un vector perpendicular a la vez a $\mathbf{AB}$ y a $\mathbf{AC}$, siendo $\mathbf{A}(1, 0, 2)$, $\mathbf{B}(2, 3, 1)$ y $\mathbf{C}(0, 1, 4)$, y usa ese vector para dar el área del triángulo ABC.

Solución

Los dos vectores salen restando coordenadas del punto de llegada menos el de partida: $\mathbf{AB} = (2 - 1, 3 - 0, 1 - 2) = (1, 3, -1)$ y $\mathbf{AC} = (0 - 1, 1 - 0, 4 - 2) = (-1, 1, 2)$.

El producto vectorial de los dos da directamente un vector perpendicular a ambos. Su primera coordenada es $3 \cdot 2 - (-1) \cdot 1 = 7$; la segunda lleva signo cambiado, $-(1 \cdot 2 - (-1) \cdot (-1)) = -(2 - 1) = -1$; y la tercera es $1 \cdot 1 - 3 \cdot (-1) = 4$. Queda **$(7, -1, 4)$** .

El módulo de ese vector es la raíz de $49 + 1 + 16 = 66$, es decir $\sqrt{66}$, y mide el área del

paralelogramo que forman AB y AC. El triángulo es la mitad: $\sqrt{66} / 2$ unidades de superficie, que está entre 4,06 y 4,07.

Para corregirte, multiplica escalarmente el resultado por cada uno de los dos vectores de partida: con AB da $1 \cdot 7 + 3 \cdot (-1) + (-1) \cdot 4 = 0$, y con AC da $(-1) \cdot 7 + 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 4 = 0$. Los dos ceros confirman que es perpendicular a los dos.

▲ El producto vectorial sí depende del orden: hacerlo al revés devuelve $(-7, 1, -4)$, el mismo vector con el sentido cambiado. Para el área da igual, porque el módulo es el mismo, pero para dar un vector concreto no da igual.

13

Calcula el volumen del paralelepípedo determinado por $\mathbf{u} = (1, 2, 3)$, $\mathbf{v} = (0, 1, -1)$ y $\mathbf{w} = (2, 0, 1)$, y deduce el volumen del tetraedro que tiene esos tres vectores como aristas desde un mismo vértice.

Solución

El volumen del paralelepípedo es el valor absoluto del determinante que forman las tres coordenadas por filas.

Desarrollando por la primera fila: $1 \cdot (1 \cdot 1 - (-1) \cdot 0) - 2 \cdot (0 \cdot 1 - (-1) \cdot 2) + 3 \cdot (0 \cdot 0 - 1 \cdot 2) = 1 - 2 \cdot 2 + 3 \cdot (-2) = 1 - 4 - 6 = -9$.

El volumen es el valor absoluto: **9** unidades cúbicas. ▲ El signo menos no es un error ni significa nada raro: indica la orientación de los tres vectores, y un volumen no puede ser negativo, así que se toma el valor absoluto sin más.

El tetraedro con esas tres aristas desde un vértice ocupa la sexta parte del paralelepípedo, así que su volumen es $9 / 6 = 3/2$ unidades cúbicas.

Para corregirte, vuelve a calcular el determinante desarrollando por la segunda fila, que tiene un cero y sale más corto: $-0 \cdot (2 \cdot 1 - 3 \cdot 0) + 1 \cdot (1 \cdot 1 - 3 \cdot 2) - (-1) \cdot (1 \cdot 0 - 2 \cdot 2) = 0 + (1 - 6) + (0 - 4) = -9$. Mismo número por otro camino.

La recta y el plano en el espacio

Lo que hay que saber

Para fijar una **recta** hacen falta dos cosas: uno de sus puntos y un **vector director**. En forma paramétrica, cada coordenada es la del punto más el parámetro por la coordenada que le toca del director; igualando los tres parámetros despejados sale la forma continua, que solo puede escribirse así si ninguna coordenada del director vale cero: la que valga cero deja esa coordenada fija y se escribe aparte.

Para fijar un **plano** bastan uno de sus puntos y un **vector normal**, que es el perpendicular a él. Su ecuación general es $Ax + By + Cz + D = 0$, y los coeficientes A , B y C son las coordenadas de ese vector normal.

Si hacen falta a partir de puntos: el director de una recta es el vector que une dos de sus puntos *distintos*, y el normal de un plano es el producto vectorial de dos direcciones suyas *no proporcionales*. ■ Ninguno de los dos puede salir el vector cero: si sale, los puntos o las direcciones elegidas no valían.

Comprobar que un **punto** pertenece a una recta consiste en encontrar un valor del parámetro que sirva para las tres coordenadas *a la vez*. En un plano es más sencillo: basta con sustituir en la ecuación.

Dos rectas con directores **proporcionales** son paralelas o coincidentes, y se distinguen mirando si un punto de una está en la otra. Con directores no proporcionales, o se cortan o se cruzan, y lo decide el producto mixto de los dos directores con el vector que une un punto de cada una.

Si el director de una recta y el normal de un plano son perpendiculares —producto escalar cero—, caben dos casos: la recta es **paralela** al plano o está contenida en él, y se separan mirando si un punto de la recta cumple la ecuación del plano. Si ese producto escalar no vale cero, hay un único punto de corte y se halla sustituyendo la recta en la ecuación del plano.

- 14** Escribe, en forma paramétrica y en forma continua, la recta determinada por los puntos **A(1, 2, 3)** y **B(3, 5, 1)**, y decide si **P(5, 8, -1)** y **Q(0, 0, 0)** están en ella.

Solución

Para escribir una recta hacen falta un punto suyo y una dirección. El punto puede ser A , y la dirección, el vector que va de A a B : $(3 - 1, 5 - 2, 1 - 3) = (2, 3, -2)$.

En forma paramétrica, cada coordenada es la del punto más el parámetro por la coordenada correspondiente de la dirección: $x = 1 + 2t$, $y = 2 + 3t$, $z = 3 - 2t$.

Despejando t en las tres y igualando se llega a la forma continua: $(x - 1)/2 = (y - 2)/3 = (z - 3)/(-2)$.

Para $P(5, 8, -1)$ se busca un valor de t que sirva para las tres a la vez. De la primera, $5 = 1 + 2t$ da $t = 2$; con ese valor la segunda da $2 + 6 = 8$ y la tercera $3 - 4 = -1$. **P sí está en la recta.**

Para $Q(0, 0, 0)$, la primera da $0 = 1 + 2t$, es decir $t = -1/2$, y con ese valor la segunda daría $2 - 3/2 = 1/2$, que no es 0. **Q no está.**

▲ El valor del parámetro tiene que ser el mismo en las tres coordenadas: comprobar solo una no demuestra nada, porque cualquier punto del espacio encaja en una de ellas si se elige t a conveniencia.

- 15** Halla la ecuación del plano que pasa por **P(1, 0, 0)**, **Q(0, 2, 0)** y **R(0, 0, 3)**.

Solución

Un plano queda determinado por un punto suyo y un vector perpendicular a él. El punto puede ser P ; el vector perpendicular sale del producto vectorial de dos direcciones del plano.

Esas dos direcciones son $PQ = (0 - 1, 2 - 0, 0 - 0) = (-1, 2, 0)$ y $PR = (0 - 1, 0 - 0, 3 - 0) = (-1, 0, 3)$.

Su producto vectorial tiene primera coordenada $2 \cdot 3 - 0 \cdot 0 = 6$; segunda, con el signo cambiado, $-((-1) \cdot 3 - 0 \cdot (-1)) = 3$; y tercera, $(-1) \cdot 0 - 2 \cdot (-1) = 2$. El vector perpendicular es **(6, 3, 2)**.

La ecuación se monta con ese vector como coeficientes y obligando a que pase por P: $6(x - 1) + 3(y - 0) + 2(z - 0) = 0$, es decir $6x + 3y + 2z = 6$.

Para corregirte, sustituye los otros dos puntos, que no has usado en el último paso: con Q sale $0 + 6 + 0 = 6$ y con R sale $0 + 0 + 6 = 6$. Los dos cumplen la ecuación.

16 Decide cómo están situadas las rectas $r: (1, 0, 1) + t(1, 2, -1)$ y $s: (0, 1, 2) + u(2, 1, 0)$.

Solución

Lo primero es mirar las direcciones. $(1, 2, -1)$ y $(2, 1, 0)$ no son proporcionales: pasar de 1 a 2 en la primera coordenada exigiría multiplicar por 2, y entonces la segunda tendría que ser 4 y no 1. Como las direcciones son distintas, las rectas **no son paralelas** y solo quedan dos posibilidades: cortarse o cruzarse.

Para separarlas se mira si los tres vectores —las dos direcciones y el que une un punto de cada recta— caben en un mismo plano. Ese vector de unión es $(0 - 1, 1 - 0, 2 - 1) = (-1, 1, 1)$.

El determinante de los tres, por filas, es $1 \cdot (1 \cdot 1 - 0 \cdot 1) - 2 \cdot (2 \cdot 1 - 0 \cdot (-1)) + (-1) \cdot (2 \cdot 1 - 1 \cdot (-1)) = 1 - 4 - 3 = -6$.

Como no es cero, los tres vectores no caben en un plano: las rectas **se cruzan**, es decir, no se cortan y tampoco son paralelas.

Para corregirte por otro camino, intenta cortarlas a la fuerza: igualando las primeras coordenadas, $1 + t = 2u$; igualando las segundas, $2t = 1 + u$. De la segunda, $u = 2t - 1$, y llevándolo a la primera, $1 + t = 4t - 2$, de donde $t = 1$ y $u = 1$. Con esos valores la tercera coordenada daría $1 - 1 = 0$ por un lado y 2 por otro: no hay punto común, como se había deducido.

17 Halla el punto donde la recta $r: (1, 0, 1) + t(1, 2, -1)$ corta al plano $\pi: 2x - y + z = 5$.

Solución

Antes de calcular conviene saber si se cortan. El vector perpendicular al plano es $(2, -1, 1)$ y la dirección de la recta es $(1, 2, -1)$; su producto escalar vale $2 - 2 - 1 = -1$.

Como ese producto no es cero, la dirección de la recta no es paralela al plano, así que la recta lo atraviesa en un punto y solo en uno.

Para encontrarlo se sustituyen las coordenadas de la recta en la ecuación del plano: $2(1 + t) - 2t + (1 - t) = 5$.

Desarrollando: $2 + 2t - 2t + 1 - t = 3 - t$, y la ecuación queda $3 - t = 5$, de donde $t = -2$.

Llevando $t = -2$ a la recta: $x = 1 - 2 = -1$, $y = 0 - 4 = -4$, $z = 1 + 2 = 3$. El punto de corte es **$(-1, -4, 3)$** .

Para corregirte, comprueba las dos condiciones a la vez: el punto cumple la ecuación del plano, porque $2 \cdot (-1) - (-4) + 3 = 5$; y está en la recta, porque con $t = -2$ salen sus tres coordenadas.

Distancias y ángulos en el espacio

Lo que hay que saber

La **distancia de un punto a un plano** sale de sustituir el punto en la ecuación del plano igualada a cero, tomar el valor absoluto y dividir entre el módulo del vector normal.

▪ El **valor absoluto** no es un adorno: sin él la cuenta puede salir negativa, y una distancia negativa no significa nada. El signo de la sustitución solo dice a qué lado del plano cae el punto.

Para medir lo que **diste un punto de una recta** hay dos caminos. Uno: el módulo del producto vectorial del vector que va desde un punto cualquiera de la recta hasta él, por el director, todo dividido entre el módulo del director. Otro: localizar el **pie de la perpendicular** y medir hasta ahí.

El **ángulo entre dos planos** es el que forman sus vectores normales, tomando el valor absoluto del coseno para quedarse con el menor de los dos, que cae entre 0° y 90° . El **ángulo entre dos rectas** se hace igual con los directores.

El **ángulo entre una recta y un plano** va al revés: se calcula con el director y el normal, pero el resultado es el complementario de ese ángulo menor, porque el normal es perpendicular al plano y no está dentro de él.

Antes de aceptar un coseno, mírale el tamaño: se mantiene entre -1 y 1 , así que cualquier valor fuera de ese margen delata un error de cuenta sin necesidad de repasarla.

18 Calcula la distancia del punto $P(2, 1, -1)$ al plano $\pi: 2x - 2y + z + 3 = 0$.

Solución

La distancia sale de sustituir el punto en la ecuación del plano, tomar el valor absoluto y dividir entre el módulo del vector perpendicular.

Sustituyendo: $2 \cdot 2 - 2 \cdot 1 + (-1) + 3 = 4 - 2 - 1 + 3 = 4$.

El vector perpendicular es $(2, -2, 1)$ y su módulo es la raíz de $4 + 4 + 1 = 9$, o sea **3**.

La distancia es $4 / 3$, es decir **$4/3$** unidades, que está entre 1,33 y 1,34.

Para corregirte, rehaz por separado la sustitución del punto, que es donde se cuela el error de signo: $2 \cdot 2 - 2 \cdot 1 + (-1) + 3$ tiene que volver a dar 4. ▲ Repasar solo el módulo del vector perpendicular no vigila esa parte: $4 + 4 + 1 = 9$ sale de la ecuación del plano y no cambia aunque el punto esté mal sustituido.

19 Halla el ángulo que forman los planos $\pi: x + y = 1$ y $\sigma: y + z = 2$.

Solución

El ángulo entre dos planos es el que forman sus vectores perpendiculares, tomando el valor absoluto del coseno para quedarse con el menor de los dos.

Los vectores perpendiculares se leen en los coeficientes: para π es $(1, 1, 0)$ y para σ es $(0, 1, 1)$. Ojo con la coordenada que falta: en π no aparece la z porque su coeficiente es 0.

El producto escalar vale $1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 = 1$, y cada módulo es la raíz de $1 + 1 + 0 = 2$, es decir $\sqrt{2}$.

El coseno es $1 / (\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}) = 1/2$, y el ángulo cuyo coseno vale $1/2$ es **60°** .

Para corregirte, comprueba el módulo por su cuadrado: $\sqrt{2}$ por $\sqrt{2}$ tiene que dar exactamente 2, y $1/2$ es un coseno conocido. Y rehaz el producto escalar con los dos vectores cambiados de orden: $0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0$ tiene que volver a dar 1, porque no depende del orden.

Calcula la distancia del punto $P(1, 1, 1)$ a la recta $r: (0, 0, 0) + t(1, 1, 0)$, por dos caminos distintos.

Solución

Primer camino, con el producto vectorial. Se toma el punto $A(0, 0, 0)$ de la recta y el vector $AP = (1, 1, 1)$.

El producto vectorial de AP por la dirección $(1, 1, 0)$ tiene primera coordenada $1 \cdot 0 - 1 \cdot 1 = -1$; segunda, con signo cambiado, $-(1 \cdot 0 - 1 \cdot 1) = 1$; y tercera, $1 \cdot 1 - 1 \cdot 1 = 0$. Queda $(-1, 1, 0)$, de módulo $\sqrt{2}$.

La distancia es ese módulo dividido entre el de la dirección, que también es $\sqrt{2}$: $\sqrt{2} / \sqrt{2} = 1$.

Segundo camino, buscando el pie de la perpendicular. El punto genérico de la recta es $(t, t, 0)$, y el vector que lo une con P es $(1 - t, 1 - t, 1)$. Para que sea perpendicular a la dirección, su producto escalar con $(1, 1, 0)$ tiene que anularse: $(1 - t) + (1 - t) = 0$, de donde $t = 1$.

El pie es, por tanto, $(1, 1, 0)$, y el vector que va de ahí a P es $(0, 0, 1)$, cuyo módulo vale **1**. Los dos caminos coinciden, y esa coincidencia es la comprobación: uno usa un producto vectorial y el otro una condición de perpendicularidad, así que un error de cuenta difícilmente daría el mismo número en los dos.

Límites, continuidad y asíntotas

Lo que hay que saber

Cuando al sustituir sale **0/0** hay que transformar la expresión. Si son polinomios, el valor que anula a los dos es una raíz común y se saca como factor; si hay una raíz cuadrada, se recurre a su conjugada, que es esa misma suma o resta cambiando el más por el menos, y se multiplica y divide por ella.

Cuando lo que queda es restar dos cantidades **que crecen sin tope**, el resultado puede ser cualquiera; cuando hay una raíz cuadrada por medio suele deshacerse con ese mismo giro del signo, que no es un método universal. Si lo que queda es un cociente de dos polinomios, lo decide comparar sus grados.

La **continuidad** en un punto pide tres condiciones: que la función tenga valor ahí, que el límite exista, y que ambos coincidan. Con dos tramos pegados eso se traduce en que las dos ramas lleguen al mismo número.

Donde una función es **derivable**, es continua. Y la derivada de una función definida a trozos, en el punto de empalme, exige mirar las dos ramas por separado.

Todo lo que sale aquí son **cocientes de polinomios**. Hay **asíntota vertical** donde el denominador se anula sin anularse también el numerador. Y hay **asíntota horizontal** cuando el cociente se acerca a un número fijo al crecer x , lo que pasa si el grado de arriba no supera al de abajo.

En ese mismo cociente hay **asíntota oblicua** cuando el grado de arriba es exactamente uno más que el de abajo. Se obtiene *dividiendo*: el cociente de la división es la recta y el resto, dividido entre el denominador, es lo que se hace pequeño.

Halla a cuánto tiende $(x^3 - 8) / (x^2 - 4)$ cuando x se acerca a 2.

Solución

Al sustituir $x = 2$ el numerador da $8 - 8 = 0$ y el denominador $4 - 4 = 0$. No se puede dividir, pero tampoco se puede concluir nada: hay que transformar la expresión.

Que los dos se anulen en $x = 2$ significa que los dos tienen el factor $(x - 2)$. Sacándolo: $x^3 - 8 = (x - 2)(x^2 + 2x + 4)$ y $x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2)$.

El factor $(x - 2)$ aparece arriba y abajo, y para valores de x distintos de 2 no es cero, así que se puede simplificar. Queda $(x^2 + 2x + 4) / (x + 2)$.

Ahora sí se sustituye: $(4 + 4 + 4) / (2 + 2) = 12 / 4 = 3$.

Para corregirte, deshaz la factorización multiplicando: $(x - 2)(x^2 + 2x + 4)$ da $x^3 + 2x^2 + 4x - 2x^2 - 4x - 8$, y todo se cancela salvo $x^3 - 8$. Y como segunda prueba, evalúa la expresión de partida en 2,01: sale un valor entre 3,007 y 3,008, que ya está pegado a 3.

22

Halla a cuánto tiende $\sqrt{x^2 + 3x} - x$ cuando x crece hacia más infinito.

Solución

Los dos sumandos crecen sin tope, así que aquí se están restando dos cantidades enormes. Eso no permite concluir: puede salir cualquier cosa.

Se recurre a la expresión conjugada, $\sqrt{x^2 + 3x} + x$, multiplicando y dividiendo por ella, para que en el numerador quede una diferencia de cuadrados.

Arriba: $(x^2 + 3x) - x^2 = 3x$. Abajo: $\sqrt{x^2 + 3x} + x$. La expresión es ahora $3x / (\sqrt{x^2 + 3x} + x)$.

Dividiendo arriba y abajo entre x , que es positivo y grande, queda $3 / (\sqrt{1 + 3/x} + 1)$. Cuando x crece, $3/x$ se acerca a 0, así que el denominador se acerca a $1 + 1 = 2$ y el límite vale **3/2**.

▪ Conviene retener el resultado por lo que descarta: restar dos cantidades que se hacen infinitamente grandes *no* da 0 por el hecho de ser una resta. Aquí ha dado 1,5, y cambiando el $3x$ por otro número daría otra cosa. Para corregirte, evalúa en $x = 1.000$: $\sqrt{1.003.000} - 1.000$ está entre 1,498 y 1,499, que ya ronda 1,5.

23

Ajusta a de modo que $f(x) = x^2 + a$ cuando $x \leq 1$, y $f(x) = 3x - 1$ cuando $x > 1$, no tenga salto en el punto de empalme, $x = 1$. Con ese valor, estudia si además es derivable ahí.

Solución

Para que no haya un salto en $x = 1$, las dos ramas tienen que llegar al mismo valor. Por la izquierda, la primera rama da $1 + a$; por la derecha, la segunda da $3 - 1 = 2$.

Igualando: $1 + a = 2$, de donde **$a = 1$** . Con ese valor $f(1) = 1 + 1 = 2$, que coincide con lo que dan las dos ramas, así que la función es continua ahí.

Para la derivada se hace lo mismo con las pendientes. La derivada de $x^2 + 1$ es $2x$, que en $x = 1$ vale **2**; la derivada de $3x - 1$ es **3**, que vale **3** en todas partes.

Las dos pendientes son distintas, así que la función **no es derivable en $x = 1$** : llega sin salto pero con un quiebro, como dos tramos rectos pegados formando esquina.

▪ Este ejercicio desmonta de paso una implicación que parece razonable y es falsa: ser continua no obliga a ser derivable. Aquí la función es continua en $x = 1$ con $a = 1$ y aun así no tiene derivada ahí. Lo contrario sí es cierto: donde hay derivada, hay continuidad.

24

Localiza todas las asíntotas de estas dos: (a) $f(x) = (2x^2 - 3x) / (x^2 + 1)$; (b) el cociente $(x^2 + 1)$ entre $(x - 2)$.

Solución

(a) El denominador $x^2 + 1$ vale al menos 1 para cualquier x , así que no llega a anularse y **no hay asíntotas verticales**. Arriba y abajo tienen el mismo grado, así que al crecer x mandan los términos de mayor grado y el cociente se acerca a $2/1$: **asíntota horizontal $y = 2$** .

Y ahora lo interesante: ¿la corta? Se resuelve $(2x^2 - 3x)/(x^2 + 1) = 2$, es decir $2x^2 - 3x = 2x^2 + 2$, que se reduce a $-3x = 2$ y da **$x = -2/3$** . Sustituyendo, $f(-2/3) = 2$ exactamente. La función **sí corta su asíntota horizontal**, en el punto $(-2/3, 2)$.

(b) El denominador se anula en $x = 2$, y ahí el numerador vale 5, que no es cero: hay **asíntota vertical $x = 2$** . Arriba el grado es uno más que abajo, así que no hay horizontal sino oblicua.

Dividiendo, $(x^2 + 1) / (x - 2) = x + 2 + 5/(x - 2)$. Al crecer x el último sumando se hace pequeño, así que la **asíntota oblicua es $y = x + 2$** . Esta no se corta: haría falta que $5/(x - 2)$ valiera 0, y una

fracción con numerador 5 no vale 0.

▲ Una asíntota dice cómo se comporta la función *lejos*, no que la función tenga prohibido tocarla: el apartado (a) la corta y el (b) no. La comprobación de (b) es deshacer la división: $(x + 2)(x - 2) + 5 = x^2 - 4 + 5 = x^2 + 1$.

Derivadas y derivabilidad

Lo que hay que saber

Conviene tener a mano una tabla de derivadas de las funciones elementales: la potencia baja el exponente y resta uno, el seno da coseno, la exponencial de base e se queda igual y el logaritmo neperiano da $1/x$.

Producto: se deriva el factor de la izquierda y se multiplica por el de la derecha sin tocarlo; luego al revés; y se suman los dos trozos. **Cociente:** derivada de arriba por abajo, menos arriba por derivada de abajo, todo dividido entre abajo al cuadrado.

Regla de la cadena: cuando una función está metida dentro de otra, se deriva la de fuera dejando lo de dentro intacto y se multiplica por la derivada de lo de dentro. ■ Sin ese último factor el resultado sale multiplicado o dividido por él, y el resto de la cuenta puede estar bien.

Derivación implícita: si y aparece sin estar despejada, se deriva la igualdad entera tratando y como función de x, lo que obliga a escribir y' cada vez que se deriva algo con y. Después se agrupan los términos con y' y se despeja.

La **recta tangente** en un punto pasa por él con pendiente $f'(x)$ en ese punto. La **recta perpendicular** pasa por el mismo punto con pendiente la inversa cambiada de signo, de modo que al multiplicar las dos pendientes sale exactamente -1 ; eso pide que la derivada no valga cero ahí, porque con tangente horizontal la perpendicular es vertical y no tiene pendiente.

Para que una función definida a trozos sea **derivable** en el punto de empalme hacen falta dos condiciones, y en este orden: que las dos ramas lleguen al mismo valor y que lleguen con la misma pendiente.

- 25** Deriva estas dos y evalúa cada derivada en $x = 1$: (a) $f(x) = (3x^2 - 1) / (x + 2)$; (b) la quinta potencia de $x^2 + 1$.

Solución

(a) Con un cociente, la derivada es «derivada de arriba por abajo, menos arriba por derivada de abajo, todo entre abajo al cuadrado».

Arriba deriva $6x$ y abajo deriva 1 , así que $f'(x) = [6x(x + 2) - (3x^2 - 1) \cdot 1] / (x + 2)^2$. Desarrollando el numerador: $6x^2 + 12x - 3x^2 + 1 = 3x^2 + 12x + 1$, así que $f'(x) = (3x^2 + 12x + 1) / (x + 2)^2$.

En $x = 1$: arriba $3 + 12 + 1 = 16$ y abajo $3^2 = 9$. Queda $f'(1) = 16/9$.

(b) Aquí hay una potencia de algo que a su vez depende de x , así que se deriva la potencia y se multiplica por la derivada de lo de dentro: $g'(x) = 5(x^2 + 1)^4 \cdot 2x = 10x(x^2 + 1)^4$.

En $x = 1$: $10 \cdot 1 \cdot 2^4 = 10 \cdot 16 = 160$.

▲ Olvidar el «por la derivada de lo de dentro» en (b) daría $5 \cdot 16 = 80$, justo la mitad. Cuando el resultado te salga un múltiplo redondo del que esperabas, sospecha de ese factor.

- 26** La igualdad $x^2 + y^2 - xy = 7$ relaciona y con x sin que y esté despejada. Comprueba que el punto $(3, 2)$ la cumple y halla la recta tangente en ese punto.

Solución

Comprobación primero: $3^2 + 2^2 - 3 \cdot 2 = 9 + 4 - 6 = 7$. El punto cumple la igualdad.

Ahora se deriva la igualdad entera respecto de x , tratando y como una función de x . El término x^2 da $2x$; el término y^2 da $2y \cdot y'$; y el producto xy da $y + x \cdot y'$.

Queda $2x + 2y \cdot y' - y - x \cdot y' = 0$. Agrupando los términos con y' : $y'(2y - x) = y - 2x$, de donde $y' = (y - 2x) / (2y - x)$.

$$-2x) / (2y - x).$$

En el punto (3, 2): arriba $2 - 6 = -4$ y abajo $4 - 3 = 1$. La pendiente vale -4 .

La recta tangente pasa por (3, 2) con esa pendiente: $y - 2 = -4(x - 3)$, es decir $y = -4x + 14$.

Para corregirte, comprueba que la recta pasa por el punto sustituyendo: $-4 \cdot 3 + 14 = 2$. Y comprueba el denominador antes de dividir: si $2y - x$ hubiera salido 0, la tangente sería vertical y no tendría pendiente.

27

Halla **a** y **b** para que la función $f(x) = x^2$ si $x \leq 1$ y $f(x) = ax + b$ si $x > 1$ sea derivable en $x = 1$.

Solución

Ser derivable exige dos cosas a la vez, y en este orden: que no haya salto y que no haya quiebro. Las dos dan una ecuación.

Sin salto: por la izquierda f llega a $1^2 = 1$ y por la derecha a $a + b$. Primera ecuación: **$a + b = 1$** .

Sin quiebro: la derivada por la izquierda es $2x$, que en $x = 1$ vale 2; por la derecha es a . Segunda ecuación: **$a = 2$** .

Sustituyendo en la primera, $2 + b = 1$, de donde **$b = -1$** . La segunda rama es $y = 2x - 1$.

Para corregirte, comprueba las dos condiciones con los valores hallados: $2 \cdot 1 - 1 = 1$, que coincide con 1^2 ; y la pendiente de $2x - 1$ es 2, que coincide con $2x$ en $x = 1$. ▲ Si solo se impone la continuidad quedan infinitas parejas (a , b) con $a + b = 1$; es la segunda condición la que fija una sola.

28

Escribe la recta tangente y la recta perpendicular a la curva de $f(x) = x^3 - 6x + 4$ donde **x vale 2**.

Solución

Primero el punto: $f(2) = 8 - 12 + 4 = 0$, así que se trabaja en (2, 0).

La derivada es $f'(x) = 3x^2 - 6$, y en $x = 2$ vale $3 \cdot 4 - 6 = 6$. Esa es la pendiente de la tangente.

La tangente es $y - 0 = 6(x - 2)$, es decir **$y = 6x - 12$** .

La perpendicular arranca del mismo punto con pendiente la inversa cambiada de signo, o sea $-1/6$: y $-0 = (-1/6)(x - 2)$, es decir **$y = -x/6 + 1/3$** .

Para corregirte, sustituye $x = 2$ en las dos rectas: $6 \cdot 2 - 12 = 0$ y $-2/6 + 1/3 = 0$. Las dos pasan por el punto. ▲ Que una recta pase por el punto no confirma que la pendiente sea la correcta: con cualquier otra pendiente también pasaría. Lo que hay que comprobar aparte es la derivada, y que al multiplicar las dos pendientes, $6 \cdot (-1/6)$, salga -1 , que es la marca de dos rectas perpendiculares.

Lo que hay que saber

Donde la **derivada es positiva** la función crece, y donde es negativa, decrece. Por eso el estudio del crecimiento es, en realidad, un estudio del signo de f' .

Los **candidatos** a máximo o a mínimo son los puntos donde la derivada se anula, y también los puntos donde no hay derivada y los extremos del tramo en que se trabaja: el valor absoluto de x tiene mínimo en 0 sin que su derivada se anule ahí. Se llaman candidatos y no soluciones a propósito: hay que decidir uno por uno si lo son, y el criterio es cómo se comporta f' alrededor.

La **segunda derivada** resume ese estudio en un punto donde f' se anula: si sale negativa hay máximo, y si sale positiva, mínimo. Cuando también se anula, no decide y hay que volver al signo de f' .

El signo de la segunda derivada gobierna la **concavidad**: positiva, la función se curva hacia arriba; negativa, hacia abajo. Los **puntos de inflexión** son candidatos donde la segunda derivada se anula, y hace falta que además cambie de signo; en las funciones de esta página basta con eso, pero también puede haber inflexión donde la segunda derivada no exista.

Optimización en tres pasos: escribir la cantidad que hay que hacer grande o pequeña, usar el dato del enunciado para dejarla con una sola incógnita, y derivar. ▲ Y comprobar al final que el candidato es del tipo que se pedía y que cae dentro de los valores que el problema permite.

Truco que ahorra raíces: para hacer mínima una **distancia** basta con hacer mínimo su cuadrado, porque las dos cosas ocurren en el mismo sitio. Al final se toma la raíz solo una vez, y solo si piden la distancia.

29

Averigua en qué tramos crece y en cuáles decrece $f(x) = x^3 - 12x$, y localiza sus máximos y mínimos diciendo cuánto vale la función en cada uno.

Solución

El crecimiento lo decide el signo de la derivada: $f'(x) = 3x^2 - 12$.

Se anula cuando $3x^2 = 12$, es decir en $x = -2$ y $x = 2$. Esos dos valores parten la recta en tres zonas, y basta con probar un número de cada una.

En $x = -3$: $27 - 12 = 15$, positiva, así que **crece**. En $x = 0$: $0 - 12 = -12$, negativa, así que **decrece**.

En $x = 3$: $27 - 12 = 15$, positiva, **crece**.

Donde pasa de crecer a decrecer hay un máximo *local*, y al revés un mínimo local. En $x = -2$ hay **máximo local**, con $f(-2) = -8 + 24 = 16$; en $x = 2$ hay **mínimo local**, con $f(2) = 8 - 24 = -16$. Lo confirma la segunda derivada, $f''(x) = 6x$, que vale -12 en $x = -2$ y 12 en $x = 2$.

▪ Y aquí hay un paso que no se puede saltar: que la derivada se anule no basta para que haya máximo o mínimo. La función x^3 tiene derivada $3x^2$, que se anula en $x = 0$, y sin embargo crece antes y después de ese punto, así que ahí no hay ni máximo ni mínimo. Lo que decide es el *cambio de signo* de la derivada, no su anulación.

30

Estudia la concavidad de $f(x) = x^4 - 6x^2$ y halla sus puntos de inflexión.

Solución

La concavidad la decide el signo de la segunda derivada. La primera es $f'(x) = 4x^3 - 12x$ y la segunda, $f''(x) = 12x^2 - 12$.

Se anula cuando $x^2 = 1$, o sea en $x = -1$ y $x = 1$.

Probando el signo: en $x = -2$ vale $48 - 12 = 36$, positiva; en $x = 0$ vale -12 , negativa; en $x = 2$ vale 36 , positiva. La función es cóncava hacia arriba fuera del tramo $(-1, 1)$ y hacia abajo dentro de él.

Como la segunda derivada *cambia de signo* en los dos valores, en los dos hay punto de inflexión. Sus alturas son $f(-1) = 1 - 6 = -5$ y $f(1) = 1 - 6 = -5$, así que los puntos son **$(-1, -5)$ y $(1, -5)$** .

▲ Igual que antes, anularse no basta: la función x^4 tiene segunda derivada $12x^2$, que vale 0 en $x = 0$,

y aun así se mantiene positiva a los dos lados, así que ahí no hay inflexión. Hay que comprobar el cambio, no la anulación.

31

Halla el punto de la recta $y = 2x + 1$ que está más cerca del origen, y comprueba el resultado por un camino distinto del que uses para hallarlo.

Solución

Un punto cualquiera de la recta es $(x, 2x + 1)$. Lo que hay que hacer pequeño es su distancia al origen, pero se trabaja con el *cuadrado* de la distancia, que se minimiza en el mismo sitio y evita arrastrar una raíz.

Ese cuadrado es $D(x) = x^2 + (2x + 1)^2 = x^2 + 4x^2 + 4x + 1 = 5x^2 + 4x + 1$.

Derivando: $D'(x) = 10x + 4$, que se anula en $x = -2/5$. La segunda derivada es 10, positiva, así que ahí hay un mínimo y no un máximo.

La altura correspondiente es $y = 2 \cdot (-2/5) + 1 = 1/5$, así que el punto es $(-2/5, 1/5)$. Su distancia al cuadrado vale $4/25 + 1/25 = 1/5$, de modo que la distancia es $\sqrt{5}/5$, entre 0,44 y 0,45.

La comprobación va por otro camino: la distancia del origen a la recta $2x - y + 1 = 0$ se calcula sustituyendo el origen, tomando valor absoluto y dividiendo entre la raíz de $4 + 1$, lo que da $1/\sqrt{5} = \sqrt{5}/5$. Mismo número sin derivar nada. Y de paso, el vector que va del origen al punto hallado es $(-2/5, 1/5)$, cuyo producto escalar con la dirección de la recta $(1, 2)$ vale $-2/5 + 2/5 = 0$: sale perpendicular, que es como tenía que salir.

32

Descompón el número **12** en dos sumandos positivos de manera que el producto de uno por el cuadrado del otro sea lo mayor posible.

Solución

Si uno de los sumandos es y , el otro es $12 - y$, y lo que hay que hacer grande es $P(y) = (12 - y) \cdot y^2 = 12y^2 - y^3$, con y entre 0 y 12.

Derivando: $P'(y) = 24y - 3y^2 = 3y(8 - y)$, que se anula en $y = 0$ y en $y = 8$.

El valor $y = 0$ se descarta porque deja un sumando nulo y el producto valdría 0. Queda $y = 8$, y la segunda derivada $P''(y) = 24 - 6y$ vale $24 - 48 = -24$ en ese punto: negativa, luego es un máximo. Y lo es del intervalo entero, no solo de su entorno: $P'(y) = 3y(8 - y)$ es positiva entre 0 y 8 y negativa entre 8 y 12, así que P sube hasta $y = 8$ y baja después.

Los dos sumandos son, por tanto, **8 y 4**, con producto $4 \cdot 8^2 = 4 \cdot 64 = 256$. Ojo al orden: el 8 es el que va al cuadrado.

Para corregirte, prueba una descomposición vecina y comprueba que da menos: con 6 y 6 sale $6 \cdot 36 = 216$, y con 5 y 7 sale $5 \cdot 49 = 245$. Los dos quedan por debajo de 256. ▲ Probar unos cuantos casos no demuestra que sea el máximo —hay infinitas descomposiciones—; lo demuestra la derivada. Los casos vecinos sirven para detectar un error de cuenta, no para sustituir el razonamiento.

Integral indefinida: cálculo de primitivas

Lo que hay que saber

Una **primitiva** de una función es otra cuya derivada es ella. Como la derivada de una constante es cero, hay infinitas primitivas y se escriben todas juntas añadiendo **+ C**.

Conviene tener a mano una tabla de primitivas con las inmediatas: la potencia sube el exponente y divide entre el nuevo, *salvo si el exponente vale -1*, que dejaría dividir entre cero y da logaritmo; la exponencial de base e se queda igual; y $1/u$ da el logaritmo del valor absoluto de u , pero *solo si arriba está exactamente la derivada de u* .

Cuando falta un factor constante para que sea inmediata, se **multiplica y se divide** por ese número. ■ Ese apaño vale con números, no con expresiones que lleven x : una x no se puede sacar fuera de la integral.

Cambio de variable: si dentro de la expresión hay un bloque cuya derivada aparece multiplicando fuera, se llama u a ese bloque. La integral se vuelve inmediata en u y al final se deshace el cambio.

Por partes: para un producto de dos cosas que no se relacionan, se deriva una y se integra la otra. Queda la primera por la integral de la segunda, menos la integral del producto de la *derivada de la primera* por la *integral de la segunda*. Se elige para derivar la que se simplifica al derivarla.

La comprobación de una primitiva es **derivarla** y ver si sale el integrando. Es rápida y conviene hacerla cada vez que haya habido un cambio de variable o una integración por partes.

33 Calcula: (a) la integral de $3x^2 - 4x + 5$; (b) la integral de $1 / (2x + 1)$.

Solución

(a) Se integra sumando uno al exponente y dividiendo entre el exponente nuevo, término a término. El $3x^2$ da $3x^3/3 = x^3$; el $-4x$ da $-4x^2/2 = -2x^2$; y el 5 da $5x$.

Resultado: $x^3 - 2x^2 + 5x + C$.

(b) La integral de $1/u$ es el logaritmo del valor absoluto de u , pero solo si arriba está la derivada de u . Aquí $u = 2x + 1$ tiene derivada 2, y arriba hay un 1, así que falta un factor 2.

Se arregla multiplicando y dividiendo por 2: la integral de $1/(2x + 1)$ es la mitad de la integral de $2/(2x + 1)$, que ya es inmediata. Resultado: $(1/2) \cdot \ln|2x + 1| + C$.

Para corregirte, deriva los dos resultados. En (a): $3x^2 - 4x + 5$, que es el integrando. En (b): la derivada de $(1/2)\ln|2x + 1|$ es $(1/2) \cdot 2/(2x + 1) = 1/(2x + 1)$, también el integrando.

34 Calcula la integral de $x \cdot (x^2 + 1)^4$.

Solución

Aquí no hay fórmula directa, pero dentro del paréntesis hay algo cuya derivada aparece multiplicando: la derivada de $x^2 + 1$ es $2x$, y fuera hay una x .

Se llama $u = x^2 + 1$. Entonces $du = 2x dx$, o lo que es lo mismo, $x dx = du/2$. La integral se convierte en la mitad de la integral de u^4 .

La integral de u^4 es $u^5/5$, así que la mitad es $u^5/10$.

Deshaciendo el cambio: $(x^2 + 1)^5 / 10 + C$.

Para corregirte, deriva: la derivada de $(x^2 + 1)^5/10$ es $5(x^2 + 1)^4 \cdot 2x / 10$, y $5 \cdot 2 / 10 = 1$, así que queda $x(x^2 + 1)^4$, que es el integrando de partida.

35

Calcula la integral de $x \cdot e^x$ y explica por qué derivar el resultado no basta para darlo del todo por bueno.

Solución

Es un producto de dos cosas que no tienen nada que ver entre sí, y el cambio de variable no lo simplifica. Toca integrar por partes: se elige una parte para derivar y otra para integrar, y la fórmula deja una integral nueva que ha de ser más fácil.

Se deriva la x , porque al derivarla desaparece, y se integra e^x , porque al integrarlo se queda igual. Queda $x \cdot e^x$ menos la integral de e^x .

La integral de e^x es e^x , así que el resultado es $x \cdot e^x - e^x + C$, que se escribe mejor como $e^x(x - 1) + C$.

Comprobación derivando: la derivada de $e^x(x - 1)$ es $e^x(x - 1) + e^x \cdot 1 = e^x(x - 1 + 1) = x \cdot e^x$. Sale el integrando.

▲ Y ahora lo que pedía el enunciado: esa comprobación es buena pero tiene un punto ciego. La derivada de una constante es 0, así que *cualquier* valor de C pasa la prueba, y también la pasaría un resultado al que le faltara la C . Derivar confirma la parte que depende de x ; que la constante esté escrita hay que mirarlo aparte.

Integral definida, áreas y volúmenes

Lo que hay que saber

La **regla de Barrow** dice que la integral entre dos valores es una primitiva evaluada arriba menos evaluada abajo. La constante C no hace falta: se cancelaría al restar.

▪ La integral definida **suma con signo**: los trozos donde la función es negativa restan. Por eso la integral y el área que encierra la curva con el eje son dos cosas distintas: coinciden cuando la función no baja del eje en el tramo entero, y cuando no sube de él el área es la integral cambiada de signo.

Para el **área**, por tanto: se buscan los cortes con el eje dentro del tramo, se parte la integral en esos puntos, y se suman los trozos en valor absoluto.

El **área entre dos curvas** es la integral de la de arriba menos la de abajo, entre los puntos donde se cortan. Cuál va por encima se decide probando un valor intermedio, antes de integrar.

El **volumen de revolución** alrededor del eje horizontal sale de girar el recinto que queda entre la curva, el eje y los dos extremos. Girando solo la curva saldría una superficie, no un cuerpo. Ese volumen vale π por la integral del *cuadrado* de la función entre esos dos extremos. El cuadrado suele dejar una integral más cómoda que la propia función.

Comprobación barata de un volumen: compararlo con el del cilindro que lo contiene, que se calcula de cabeza con el radio mayor y la longitud del tramo. El resultado no puede pasar de esa cota, y la iguala justo cuando la función es constante, porque entonces el cuerpo es el cilindro.

36

Calcula $\int_0^2 (3x^2 - 2x) dx$.

Solución

La regla de Barrow dice que se busca una primitiva del integrando y se resta su valor en los dos extremos, el de arriba menos el de abajo.

Una primitiva de $3x^2 - 2x$ es $x^3 - x^2$. No hace falta escribir la constante: al restar se cancelaría.

En el extremo superior: $2^3 - 2^2 = 8 - 4 = 4$. En el inferior: $0 - 0 = 0$.

El resultado es $4 - 0 = 4$.

Para corregirte, deriva la primitiva antes de sustituir nada: la derivada de $x^3 - x^2$ es $3x^2 - 2x$, que es el integrando. ▲ Esa comprobación solo sirve en un sentido: si al derivar no sale el integrando, la primitiva está mal; pero una primitiva equivocada puede dar por casualidad el número correcto al

restar los dos extremos, así que el número final no comprueba la primitiva.

- 37** Calcula $\int_0^3 (x^2 - 4) dx$ y, después, el área que encierra la curva de $x^2 - 4$ con el eje horizontal desde $x = 0$ hasta $x = 3$.

Solución

Una primitiva es $x^3/3 - 4x$. En el extremo superior vale $27/3 - 12 = 9 - 12 = -3$; en el inferior, 0. La integral vale -3 .

Ese número negativo no es un error: $x^2 - 4$ es negativa entre 0 y 2 y positiva entre 2 y 3, y la integral suma con signo, así que lo de debajo del eje resta.

Para el área hay que partir en el punto donde cambia de signo, que es donde $x^2 = 4$, es decir $x = 2$, y tomar cada trozo en valor absoluto.

De 0 a 2: $8/3 - 8 = -16/3$, cuyo valor absoluto es $16/3$. De 2 a 3: $(9 - 12) - (8/3 - 8) = -3 + 16/3 = 7/3$, que ya es positivo.

El área es $16/3 + 7/3 = 23/3$ unidades de superficie, entre 7,66 y 7,67. ■ Fíjate en que la integral vale -3 y el área $23/3$: que una integral definida salga negativa no indica que haya un fallo, indica que hay más recinto por debajo del eje que por encima. El área y la integral son cosas distintas: coinciden cuando la curva no baja del eje en el tramo entero, y cuando no sube de él el área es la integral cambiada de signo.

- 38** Calcula el área del recinto encerrado entre la curva $y = x^2$ y la recta $y = 2x$.

Solución

Primero hay que saber entre qué valores está el recinto: son los puntos donde se cortan las dos. Igualando, $x^2 = 2x$, o sea $x^2 - 2x = 0$, que da $x = 0$ y $x = 2$.

Entre esos dos valores hay que saber cuál va por encima. Probando en $x = 1$: la recta da 2 y la curva da 1, así que **la recta está por encima**.

El área es la integral, entre 0 y 2, de la de arriba menos la de abajo: $\int_0^2 (2x - x^2) dx$.

Una primitiva es $x^2 - x^3/3$. En 2 vale $4 - 8/3 = 4/3$; en 0 vale 0. El área es $4/3$ unidades de superficie, entre 1,33 y 1,34.

▲ Restar en el orden equivocado daría $-4/3$. Un área negativa avisa de que te has confundido de orden, pero solo en este caso: si el recinto cambiara de lado a mitad de camino, los dos trozos se compensarían y el resultado podría salir positivo y estar mal igualmente. Por eso se comprueba cuál va por encima antes de integrar, y no después mirando el signo.

- 39** El recinto limitado por la curva $y = \sqrt{x}$, el eje horizontal y las rectas $x = 0$ y $x = 4$ gira alrededor del eje horizontal. Calcula el volumen del cuerpo que se genera.

Solución

Al girar ese recinto alrededor del eje horizontal, el volumen es π por la integral del cuadrado de la función entre los dos extremos.

El cuadrado de $\sqrt{x}$ es simplemente x , lo que deja la integral más cómoda que la propia función.

Así que el volumen es $\pi \cdot \int_0^4 x dx$. Una primitiva de x es $x^2/2$, que en 4 vale $16/2 = 8$ y en 0 vale 0.

El volumen es 8π unidades cúbicas, un valor entre 25,13 y 25,14.

Para corregirte, compara con un cilindro: el cuerpo está metido dentro del cilindro de radio $\sqrt{4} = 2$ y longitud 4, cuyo volumen es $\pi \cdot 2^2 \cdot 4 = 16\pi$. El resultado, 8π , es la mitad de esa cota, así que cae donde debe. Si te hubiera salido más de 16π , habría un error seguro.

Lo que hay que saber

La **intersección** $A \cap B$ es que ocurran los dos, y la **unión**, que ocurra al menos uno. ▲ Aquí la unión se escribe **A o B**, con la palabra, porque el símbolo habitual no existe en el tipo de letra de la versión imprimible.

La probabilidad de que ocurra **A o B** se obtiene sumando la de A con la de B y descontando después $P(A \cap B)$, que al sumar ha quedado contada por duplicado. Y la del **suceso contrario** se saca restando de 1 la del suceso: es el atajo cuando el enunciado dice «al menos uno».

La **probabilidad condicionada** $P(A | B)$ es $P(A \cap B)$ dividido entre $P(B)$, y responde a «sabiendo que ha pasado B, ¿qué probabilidad tiene A?». Exige que $P(B)$ no sea cero.

Dos sucesos son **independientes** cuando $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$, lo que equivale a que $P(A | B)$ sea igual a $P(A)$. Dos sucesos son **incompatibles** cuando no pueden ocurrir a la vez, o sea cuando $A \cap B$ se queda vacío; entonces $P(A \cap B) = 0$, pero al revés no tiene por qué, porque un suceso posible puede tener probabilidad cero.

Probabilidad total: si algo puede venir de varias procedencias que se excluyen entre sí y cubren todos los casos, su probabilidad es la suma de, en cada procedencia, lo que aporta por lo que falla. El resultado tiene que caer entre el menor y el mayor de esos porcentajes, por ser una media ponderada de ellos.

Teorema de Bayes: para dar la vuelta a la condicionada —ya sé el efecto y pregunto por la causa— se divide lo que aporta esa causa entre el total calculado antes. Las probabilidades de todas las causas tienen que sumar 1, y eso sirve de comprobación.

40

De dos sucesos se sabe que $P(A) = 3/5$, $P(B) = 1/2$ y $P(A \cap B) = 3/10$. Calcula $P(A | B)$, decide si son independientes y halla la probabilidad de que ocurra A o B.

Solución

La probabilidad de A sabiendo que ha ocurrido B es el cociente entre la de que ocurran los dos y la de B: $(3/10) / (1/2) = (3/10) \cdot 2 = 3/5$.

Ese resultado coincide con $P(A)$, es decir: saber que B ha ocurrido no cambia la probabilidad de A. Los sucesos son **independientes**.

Lo mismo se comprueba multiplicando: $P(A) \cdot P(B) = (3/5) \cdot (1/2) = 3/10$, que es exactamente $P(A \cap B)$. Es el mismo hecho visto de otra manera, y sirve de control mutuo.

Para que ocurra A o B se suman las dos y se descuenta la parte común, que al sumar quedaría contada por duplicado: $3/5 + 1/2 - 3/10 = 6/10 + 5/10 - 3/10 = 8/10 = 4/5$.

▲ Independiente no es lo mismo que incompatible, aunque las dos palabras suenen a «no tienen que ver». Incompatible querría decir $P(A \cap B) = 0$, y aquí vale $3/10$: estos dos sucesos ocurren juntos tres veces de cada diez. De hecho, dos sucesos incompatibles de probabilidad no nula no pueden ser independientes, porque saber que ocurre uno descarta el otro.

41

Una fábrica produce el **50 %** de sus piezas en la máquina A, el **30 %** en la B y el **20 %** en la C. Salen defectuosas el **1 %** de las de A, el **2 %** de las de B y el **3 %** de las de C. (a) ¿Con qué probabilidad sale defectuosa una pieza cualquiera? (b) Sabiendo que una pieza ha salido defectuosa, ¿con qué probabilidad procede de la máquina A?

Solución

(a) Cada máquina aporta defectuosas en proporción a lo que fabrica. Se multiplica, en cada una, lo que produce por lo que falla, y se suman las tres aportaciones.

De A: $(1/2) \cdot (1/100) = 5/1.000$. De B: $(3/10) \cdot (2/100) = 6/1.000$. De C: $(2/10) \cdot (3/100) = 6/1.000$.

Sumando: $5/1.000 + 6/1.000 + 6/1.000 = 17/1.000$, es decir el **1,7 %**. Obsérvese que queda entre el 1 % y el 3 %, que son el mínimo y el máximo de las tres máquinas: tenía que quedar ahí, porque es

una media ponderada de esos tres porcentajes.

(b) Ahora se pregunta al revés: ya se sabe que la pieza es defectuosa y se quiere saber de dónde viene. Se divide la aportación de A entre el total de defectuosas.

Queda $(5/1.000) / (17/1.000) = 5/17$, un valor entre 0,29 y 0,30, o sea alrededor del 29 %.

Para corregirte, calcula también las otras dos: $6/17$ para B y $6/17$ para C. Las tres tienen que sumar 1, y en efecto $5/17 + 6/17 + 6/17 = 17/17$. Si no suman 1, hay un error en alguna de las tres.

42

Una urna tiene **5 bolas blancas y 3 negras**. Se extraen dos, una tras otra y **sin reponer la que sale primero**. Halla con qué probabilidad salen dos blancas, con cuál salen de distinto color y con cuál aparece al menos una negra.

Solución

Sin devolución, la segunda extracción se hace con una bola menos, así que las fracciones cambian de la primera a la segunda.

Las dos blancas: la primera blanca tiene probabilidad $5/8$; con una blanca fuera quedan 4 blancas de 7 bolas, así que la segunda tiene $4/7$. Multiplicando: $20/56 = 5/14$.

Distinto color: puede ser blanca y luego negra, con $(5/8) \cdot (3/7) = 15/56$, o negra y luego blanca, con $(3/8) \cdot (5/7) = 15/56$. Como son dos maneras distintas de que pase lo mismo, se suman: $30/56 = 15/28$.

Al menos una negra es lo contrario de que las dos sean blancas, así que se resta de 1: $1 - 5/14 = 9/14$. Pasar por el suceso contrario ahorra sumar tres casos.

Para corregirte, calcula también las dos negras, $(3/8) \cdot (2/7) = 6/56 = 3/28$, y suma los tres resultados que se excluyen entre sí: $10/28 + 3/28 + 15/28 = 28/28 = 1$. Si el recuento no suma 1, sobra o falta un caso, y eso se nota antes de dar por bueno el resultado.

Distribuciones binomial y normal

Lo que hay que saber

Una **distribución binomial** cuenta éxitos en un número fijo de intentos independientes, todos con la misma probabilidad de éxito. Hacen falta dos datos: cuántos intentos y qué probabilidad tiene cada uno.

Su fórmula tiene tres factores: de cuántas maneras pueden repartirse los éxitos entre los intentos, la probabilidad de éxito elevada al número de éxitos, y la de fracaso elevada al número de fracasos.

Su **media** es el número de intentos por la probabilidad de éxito, y su **varianza**, eso mismo multiplicado además por la probabilidad de fracaso. ▲ Los dos son números del reparto entero, no de una repetición concreta.

Cuando el enunciado dice **al menos uno**, conviene pasar al suceso contrario: en vez de sumar muchos casos se calcula uno y se resta de 1. Con «como mucho uno» el contrario suele ser también varios casos y el atajo no ahorra nada; solo compensa si por el otro lado quedan menos, como con dos intentos, donde el contrario es únicamente «dos éxitos».

Una **distribución normal** describe una variable continua y queda fijada por su media y su desviación típica. Es simétrica respecto de la media, y esa simetría permite pasar de un lado al otro sin más datos.

Tipificar es restar la media y dividir entre la desviación típica: traduce cualquier normal a una escala común donde las probabilidades están tabuladas, con un redondeo: esos valores son aproximaciones, no números exactos. Para ir al revés, se multiplica por la desviación y se suma la media.

43

Se repite **6** veces un experimento en el que cada vez hay probabilidad **1/3** de éxito, de forma independiente. Calcula la probabilidad de obtener **exactamente 2 éxitos**, y la media y la varianza del número de éxitos.

Solución

Los tres ingredientes de la fórmula son: de cuántas maneras pueden colocarse los 2 éxitos entre los 6 intentos, la probabilidad de los éxitos y la de los fracasos.

Las maneras de elegir 2 posiciones entre 6 son **15**. Los dos éxitos aportan $(1/3)^2 = 1/9$ y los cuatro fracasos, $(2/3)^4 = 16/81$.

Multiplicando los tres: $15 \cdot (1/9) \cdot (16/81) = 240/729 = \mathbf{80/243}$, un valor entre 0,32 y 0,33.

La media es el número de intentos por la probabilidad de éxito: $6 \cdot (1/3) = \mathbf{2}$. La varianza añade el factor de los fracasos: $6 \cdot (1/3) \cdot (2/3) = \mathbf{4/3}$.

Para corregirte, comprueba que la media cae donde debe: con probabilidad 1/3 y 6 intentos, esperar 2 éxitos es razonable, y el valor más probable resulta ser precisamente 2. Y comprueba el 15 por otro camino: elegir 2 de 6 es lo mismo que elegir los 4 que se quedan fuera, y esas dos cuentas tienen que dar el mismo número.

44

Se repite **5** veces, **de forma independiente**, un experimento con probabilidad de éxito **1/5** en cada intento. Calcula la probabilidad de que haya **al menos un éxito** y la de que haya **como mucho uno**.

Solución

«Al menos uno» abarca 1, 2, 3, 4 o 5 éxitos: cinco cuentas. Su contrario es «cero éxitos», que es una sola, así que se calcula ese y se resta de 1.

Cero éxitos significa cinco fracasos seguidos, cada uno con probabilidad 4/5: $(4/5)^5 = \mathbf{1.024/3.125}$.

Por tanto, al menos un éxito tiene probabilidad $1 - 1.024/3.125 = \mathbf{2.101/3.125}$, un valor entre 0,67 y 0,68.

«Como mucho uno» son dos casos: cero o exactamente uno. El segundo se calcula con los tres ingredientes de la fórmula: 5 maneras de colocar el único éxito, por 1/5, por $(4/5)^4 = 256/625$. Sale $5 \cdot (1/5) \cdot (256/625) = 256/625 = 1.280/3.125$.

Sumando los dos: $1.024/3.125 + 1.280/3.125 = \mathbf{2.304/3.125}$, entre 0,73 y 0,74. ▲ «Al menos uno» y «como mucho uno» no son contrarios y no suman 1: se solapan en el caso de exactamente un éxito, que entra en los dos.

45

La estatura de cierta población se reparte según una **normal de media 170 cm y desviación típica 8 cm**. Sabiendo que la probabilidad de que la variable tipificada no pase de 1 vale **0,8413**, calcula la probabilidad de medir como mucho 178 cm, la de medir más de 162 cm y la de estar entre 162 y 178 cm. Ese **0,8413** es un valor aproximado, redondeado a cuatro cifras.

Solución

Tipificar es contar cuántas desviaciones típicas hay desde la media: se resta la media y se divide entre la desviación. El resultado dice a qué altura estamos en la escala común.

Para 178: $(178 - 170) / 8 = 1$. Así que la probabilidad de medir como mucho 178 cm es la que da el enunciado: **0,8413**, con su mismo redondeo.

Para 162: $(162 - 170) / 8 = -1$. Se pide «más de 162», es decir, pasar de -1. Como el reparto es simétrico respecto de la media, pasar de -1 tiene la misma probabilidad que no llegar a 1: también **0,8413**.

Para el tramo entre 162 y 178 se restan: lo que hay por debajo de 178 menos lo que hay por debajo de 162. Lo segundo es $1 - 0,8413 = 0,1587$, así que el tramo vale $0,8413 - 0,1587 = \mathbf{0,6826}$.

Para corregirte, mira los tres resultados juntos: el tramo central, 0,6826, tiene que ser menor que cualquiera de las dos colas ampliadas, 0,8413, y lo es. Y 0,6826 más las dos puntas de 0,1587 da 1.

46

Una variable se reparte según una **normal de media 500 y desviación típica 40**. Sabiendo que la probabilidad de que la variable tipificada no pase de **1,5** vale **0,9332** —también aproximado—, halla el valor **k** por debajo del cual queda el **93,32 %** de los casos.

Solución

Aquí se va al revés: se conoce la probabilidad y se busca el valor. Primero se traduce la probabilidad a la escala tipificada, y después se deshace la tipificación.

El enunciado ya da la traducción: la probabilidad 0,9332 corresponde al valor tipificado **1,5**.

Deshacer la tipificación es lo contrario de hacerla: si al tipificar se resta la media y se divide entre la desviación, ahora se multiplica por la desviación y se suma la media.

Queda $k = 500 + 1,5 \cdot 40 = 500 + 60 = \mathbf{560}$.

Para corregirte, vuelve a tipificar el resultado: $(560 - 500) / 40 = 1,5$, que es el valor del que se había partido. ▲ Y comprueba el lado: como la probabilidad pedida pasa de 1/2, el valor tiene que quedar *por encima* de la media, y 560 lo está. Si te hubiera salido por debajo de 500, habría un signo mal puesto.
