

Ejercicios Resueltos de Matemáticas 2 ESO 2026 / 2027

45 ejercicios con la solución explicada paso a paso, y la teoría de los 12 temas que trae esta selección.

Lo que vas a practicar

Números enteros y jerarquía de operaciones · Corchetes anidados, potencias con signo y problemas de temperatura (ejercicios 1, 2, 3, 4)

Potencias de exponente negativo · Dar la vuelta a la base, operar con la misma base y acotar una raíz (ejercicios 5, 6, 7, 8)

Operaciones combinadas con fracciones · Paréntesis, inversa y la fracción de lo que queda (ejercicios 9, 10, 11, 12)

Decimales, redondeo y error · Saber si un decimal va a ser exacto, y cuánto se pierde al aproximar (ejercicios 13, 14, 15)

Ecuaciones de primer grado · Con denominadores, con paréntesis y los finales raros (ejercicios 16, 17, 18, 19)

Sistemas de dos ecuaciones · Sustitución, reducción y comprobar en las dos, no en una (ejercicios 20, 21, 22)

Proporcionalidad directa e inversa · Distinguir las con una cuenta, y repartir en partes proporcionales (ejercicios 23, 24, 25)

Porcentajes, aumentos, descuentos e interés · Encadenar porcentajes, deshacer una rebaja y el interés simple (ejercicios 26, 27, 28, 29)

Teorema de Pitágoras · Hipotenusa, cateto, comprobar si un triángulo es rectángulo y la altura (ejercicios 30, 31, 32, 33)

Cuerpos geométricos: área y volumen · Prisma, cilindro, pirámide y esfera, con las unidades bien puestas (ejercicios 34, 35, 36, 37)

Funciones y la recta · Pendiente, ordenada en el origen y los cortes con los ejes (ejercicios 38, 39, 40, 41)

Estadística: medidas y frecuencias · Media, mediana, moda, rango, media ponderada y frecuencia relativa (ejercicios 42, 43, 44, 45)

Material propio de solucionario.es. Los enunciados y las soluciones están escritos por nosotros. La versión al día, con más ejercicios y de todos los cursos, está siempre en:

solucionario.es

Qué entra aquí y qué no. Esta página cubre los doce temas de **Matemáticas de 2º de ESO** que aparecen en el cuadro: los números enteros con la jerarquía de operaciones, las potencias de exponente negativo, las operaciones combinadas con fracciones, los decimales con el redondeo y el error, las ecuaciones de primer grado, los sistemas de dos ecuaciones, la proporcionalidad directa e inversa, los porcentajes con aumentos, descuentos e interés simple, el teorema de Pitágoras, los cuerpos geométricos con su área y su volumen, las funciones y la recta, y la estadística con sus medidas. **Se da por sabido lo de 1º de ESO** y no se repite: la divisibilidad con m.c.d. y m.c.m., la suma y la resta de enteros, la fracción de una cantidad, el sistema métrico, las áreas del rectángulo, el triángulo y el círculo, y la probabilidad de un caso sencillo. **Queda fuera a propósito, reservado para la página de 3º:** los polinomios y la factorización, la ecuación de segundo grado, la semejanza con el teorema de Tales, las operaciones y la simplificación de radicales, las sucesiones y las progresiones, y la notación científica. ▲ La raya entre 2º y 3º dentro del bloque de la etapa es una **decisión editorial**, igual que la que toma cada libro de texto: el currículo agrupa los saberes de Matemáticas de 1º a 3º y cada comunidad y cada centro lo concretan, así que la raya se declara aquí para que sepas qué vas a encontrar. Las medidas de los cuerpos y de los triángulos van escritas en el enunciado y las rectas se dan con su función o con dos de sus puntos, así que todo se resuelve con papel y una calculadora corriente. Esto sirve para localizar lo que flojea; no sustituye al libro ni a las clases.

Números enteros y jerarquía de operaciones

Lo que hay que saber

El orden: primero lo que hay dentro de los paréntesis y corchetes, de dentro hacia fuera · detrás las potencias y las raíces · después multiplicar y dividir · y lo último, sumar y restar. Se va de izquierda a derecha dentro del grupo de multiplicar y dividir, y dentro del de sumar y restar.

-3^2 no es $(-3)^2$. Sin paréntesis el exponente coge solo al número y el signo se aplica después: $-3^2 = -9$. Con paréntesis, el signo entra: $(-3)^2 = 9$.

Base negativa: con exponente par el resultado sale positivo, y con exponente impar sale negativo. $(-2)^2 = 4$ y $(-2)^3 = -8$.

Un menos delante de un corchete cambia el signo de todo lo que hay dentro cuando se quita: $20 - [8 - 4]$ es $20 - 8 + 4$.

▲ Multiplicar dos negativos da positivo, pero sumar dos negativos da negativo: $(-6) \cdot (-2) = 12$ y $(-6) + (-2) = -8$. Esa norma sobre los signos gobierna el producto y el cociente, no la suma.

1 Calcula: $-5 + 3 \cdot (-4) - (-6) \div 2$

Solución

Primero lo que multiplica y lo que divide; después se suma y se resta de izquierda a derecha.

$3 \cdot (-4) = -12$ y $(-6) \div 2 = -3$.

Queda $-5 + (-12) - (-3)$, y restar -3 es sumar 3: $-5 - 12 + 3 = -14$.

▲ Restar un número negativo lo convierte en una suma. Ese es el paso donde se pierde el signo.

2 Calcula y explica en qué se diferencian: -3^2 , $(-3)^2$ y $(-2)^3$

Solución

En -3^2 el exponente afecta solo al 3; el menos se queda fuera y se aplica al final: $-3^2 = -(3 \cdot 3) = -9$.

En $(-3)^2$ el paréntesis mete el signo dentro, así que se multiplica $(-3) \cdot (-3) = 9$.

$(-2)^3 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = 4 \cdot (-2) = -8$.

■ -3^2 y $(-3)^2$ valen cosas distintas: lo decide el paréntesis, no el signo. Con base negativa, el exponente par deja el resultado positivo y el impar lo deja negativo.

3 Calcula: $20 - [8 - (5 - 9) \cdot 2]$

Solución

Se empieza por el paréntesis de dentro: $5 - 9 = -4$.

Dentro del corchete queda $8 - (-4) \cdot 2$. La multiplicación va antes: $(-4) \cdot 2 = -8$.

$8 - (-8) = 8 + 8 = 16$, así que el corchete vale 16.

$20 - 16 = 4$

▲ Multiplicar va antes que restar también dentro de un corchete: hacer $8 - (-4)$ primero daría 12, y después $12 \cdot 2 = 24$, que no es el corchete.

4

Un termómetro marca $-7\text{ }^{\circ}\text{C}$ a las seis de la mañana. Sube $3\text{ }^{\circ}\text{C}$ cada hora durante 4 horas y después baja $5\text{ }^{\circ}\text{C}$ de golpe. ¿Qué temperatura marca al final?

Solución

Lo que sube en las cuatro horas: $3 \cdot 4 = 12\text{ }^{\circ}\text{C}$.

La cuenta entera es $-7 + 12 - 5$.

$-7 + 12 = 5$, y $5 - 5 = 0\text{ }^{\circ}\text{C}$.

El resultado es justo el cero, que aquí no significa «no hay temperatura»: significa cero grados. Es el punto donde el termómetro cambia de signo.

Potencias de exponente negativo

Lo que hay que saber

$a^{-n} = 1/a^n$, con a distinto de cero. El exponente negativo da la vuelta a la base; no resta y no cambia el signo. $2^{-3} = 1/8$.

▲ El signo lo pone la base, junto con la paridad del exponente: $(-2)^{-3} = -1/8$ y $(-2)^{-2} = 1/4$. Los dos tienen exponente negativo y salen con signos distintos.

Con una fracción: $(a/b)^{-n} = (b/a)^n$. Dar la vuelta a la base es intercambiar arriba y abajo.

Misma base: multiplicar suma exponentes y dividir los resta. De ahí salen los exponentes negativos: $2^3 \div 2^5 = 2^{-2} = 1/4$.

Potencia de otra potencia: los exponentes se multiplican. $(2^3)^2 = 2^6 = 64$.

Raíz entera de un número: el mayor entero cuyo cuadrado no pasa del número. Lo que sobra es lo que va de ese cuadrado al número, y tiene que ser menor que el salto hasta el cuadrado siguiente.

5

Escribe con exponente positivo y calcula: 2^{-3} , 5^{-2} y $(2/3)^{-2}$

Solución

Un exponente negativo se quita dando la vuelta a la base: $a^{-n} = 1/a^n$.

$$2^{-3} = 1/2^3 = 1/8$$

$$5^{-2} = 1/5^2 = 1/25$$

Con una fracción, dar la vuelta a la base es intercambiar numerador y denominador: $(2/3)^{-2} = (3/2)^2 = 9/4$.

▪ 2^{-3} no vale -8 ni -6 . El exponente negativo no resta ni cambia el signo: invierte.

6

Reduce a una sola potencia y da el valor: $3^5 \cdot 3^{-2} \div 3^4$

Solución

Con la misma base, multiplicar suma exponentes y dividir los resta.

$5 + (-2) - 4 = -1$, así que queda 3^{-1} .

$$3^{-1} = 1/3$$

Comprobación por otro camino: $3^5 = 243$ y $3^{-2} = 1/9$, y $243 \div 9 = 27$; después $27 \div 81 = 1/3$ OK

7

Calcula $(-2)^{-3}$ y $(-2)^{-2}$. ¿Es el exponente negativo el que decide el signo del resultado?

Solución

$$(-2)^{-3} = 1/(-2)^3 = 1/(-8) = -1/8$$

$$(-2)^{-2} = 1/(-2)^2 = 1/4 = 1/4$$

No. Los dos tienen exponente negativo y uno sale negativo y el otro positivo. Quien decide el signo es la base junto con la paridad del exponente: base negativa con exponente impar da negativo, y con exponente par da positivo.

▲ Por eso $2^{-3} = 1/8$ es positivo: la base es positiva.

8

¿Entre qué dos números enteros seguidos está $\sqrt{150}$? Da su raíz entera y lo que sobra.

Solución

Se buscan los cuadrados que la rodean: $12^2 = 144$ y $13^2 = 169$.

$144 < 150 < 169$, así que $12 < \sqrt{150} < 13$.

La raíz entera es **12** y lo que sobra es $150 - 144 = 6$.

Comprobación: $12^2 + 6 = 144 + 6 = 150$ OK

Además, lo que sobra (6) es menor que la diferencia hasta el cuadrado siguiente, que es 25. Si lo que sobrara llegara a 25, la raíz entera estaría mal elegida.

Operaciones combinadas con fracciones

Lo que hay que saber

Sumar y restar pide un denominador común; el menor múltiplo común de los denominadores es el más cómodo, aunque cualquier múltiplo común serviría.

Multiplicar: arriba con arriba y abajo con abajo. **Dividir:** se multiplica por la inversa de la *segunda* fracción.

El orden de las operaciones es el mismo que con los números enteros: lo de dentro del paréntesis, luego los productos y los cocientes, y por último las sumas y las restas.

▲ **Con números positivos, multiplicar por una fracción entre 0 y 1 encoge el número:** $2/3 \cdot 9 = 6$. Y dividir un número positivo entre una fracción entre 0 y 1 lo agranda. Con un negativo por medio deja de valer: $-9 \div (1/2) = -18$, y -18 es menor que -9 .

▲ **«Una fracción de lo que queda» no es una fracción del total.** Si ya se ha gastado $2/5$, queda $3/5$, y $1/3$ de lo que queda es $1/3 \cdot 3/5 = 1/5$ del total.

Conviene simplificar antes de multiplicar: se trabaja con números más pequeños.

9

Calcula: $3/4 + 5/6 - 1/2$

Solución

Hace falta un denominador común para los tres. El menor múltiplo común de 4, 6 y 2 es 12.

$$3/4 = 9/12, 5/6 = 10/12 \text{ y } 1/2 = 6/12.$$

$$9/12 + 10/12 - 6/12 = 13/12$$

$13/12$ pasa de la unidad, y tiene sentido: $3/4 + 5/6 = 19/12$, que ya pasa de $3/2$, y luego solo se quita $1/2$.

10 Calcula: $(2/5 + 1/3) \cdot 15/11$

Solución

El paréntesis primero. Denominador común de 5 y 3: 15.

$2/5 = 6/15$ y $1/3 = 5/15$, así que el paréntesis vale $11/15$.

$11/15 \cdot 15/11 = 165/165 = 1$

Sale justo 1 porque las dos fracciones son la una la inversa de la otra. Antes de multiplicar conviene mirar si algo se cancela: aquí se cancela todo.

11 Calcula: $3/4 \div 9/8 - 1/3$

Solución

La división va antes que la resta. Dividir es multiplicar por la inversa de la segunda.

$3/4 \div 9/8 = 3/4 \cdot 8/9 = 24/36 = 2/3$

$2/3 - 1/3 = 1/3$

▪ Aquí la inversa es la de $9/8$, que es $8/9$. Dar la vuelta a la primera daría $4/3 \cdot 9/8 = 3/2$, y el resultado final saldría $7/6$ en vez de $1/3$.

12 De un depósito **lleno** se gasta $2/5$ del agua el lunes y, el martes, $1/3$ de lo que había quedado. Al acabar el martes quedan **120 litros**. ¿Cuánta agua cabía en el depósito?

Solución

Después del lunes queda $1 - 2/5 = 3/5$ del depósito.

El martes se gasta $1/3$ de esos $3/5$, o sea $1/3 \cdot 3/5 = 1/5$ del depósito.

Entre los dos días se ha ido $2/5 + 1/5 = 3/5$, así que lo que queda es $2/5$ del total.

$2/5$ del depósito son 120 L, luego $1/5$ son 60 L y el total es $5 \cdot 60 = 300$ litros.

Comprobación con el número: el lunes se van $2/5$ de 300 = 120 L y quedan 180 L; el martes se va $1/3$ de 180 = 60 L y quedan 120 L OK

▪ « $1/3$ de lo que quedaba» no es $1/3$ del depósito. Quien tome las dos fracciones sobre el total plantea $120 \div (1 - 2/5 - 1/3)$ y responde **450 litros**, que es falso. Y aplicando ese modelo equivocado al depósito bueno de 300 L quedarían $300 \cdot (1 - 2/5 - 1/3) = 80$ L, que tampoco son los 120 L del enunciado.

Decimales, redondeo y error

Lo que hay que saber

Exacto o periódico: en una fracción ya simplificada, si el denominador solo tiene factores 2 y 5, da un decimal exacto; si aparece otro primo, el decimal es periódico.

Periódico puro cuando la parte que se repite empieza justo tras la coma (0,3636...); **periódico mixto** cuando antes hay cifras que no se repiten (0,8333...).

Redondear mira la cifra siguiente a la última que se conserva: si es 5 o más, la anterior sube; si es menor, se queda igual. **Truncar** corta y tira el resto sin mirarlo.

Error absoluto = distancia entre el valor y su aproximación, sin signo.

▲ **Conviene operar con los valores exactos, con todas sus cifras, y redondear al final.** Redondear antes de operar arrastra el error a todas las cuentas que vengan detrás.

13

Di sin hacer la división entera si estas fracciones dan un decimal exacto o periódico, y compruébalo: $\frac{7}{8}$, $\frac{5}{6}$ y $\frac{4}{11}$.

Solución

La pista está en el denominador de la fracción ya simplificada: si solo tiene factores 2 y 5, el decimal sale exacto; si aparece cualquier otro primo, sale periódico.

$\frac{7}{8}$: el 8 es $2 \cdot 2 \cdot 2$, solo doses $\rightarrow$ **exacto**. En efecto, $7 \div 8 = 0,875$.

$\frac{5}{6}$: el 6 es $2 \cdot 3$, y ese 3 estorba $\rightarrow$ **periódico**. En efecto, $5 \div 6 = 0,8333\dots$

$\frac{4}{11}$: el 11 no es ni 2 ni 5 $\rightarrow$ **periódico**. En efecto, $4 \div 11 = 0,3636\dots$

▲ La fracción tiene que estar simplificada antes de mirar el denominador.

14

Redondea **3,4567** a las centésimas y trúncalo también a las centésimas. Calcula el error que se comete en cada caso.

Solución

Redondear mira la cifra siguiente: la de las milésimas es 6, que llega a 5, así que la centésima sube. Queda **3,46**.

Truncar corta por donde se pide y tira lo demás sin mirarlo. Queda **3,45**.

Error del redondeo: $3,46 - 3,4567 = \mathbf{0,0033}$

Error del truncamiento: $3,4567 - 3,45 = \mathbf{0,0067}$

El redondeo se queda más cerca, o como mucho igual de cerca, porque elige la centésima más próxima de las dos; el truncamiento coge la de abajo aunque esté lejos. ▲ Aquí el error del truncamiento sale algo más del doble que el del redondeo, pero no hay ningún tope de dos: con 3,4599 los errores serían 0,0001 al redondear y 0,0099 al truncar, 99 veces mayor.

15

Calcula $0,4 \cdot 50$, $50 \div 0,4$ y $\frac{2}{3} \cdot 9$. ¿Es verdad que multiplicar agranda y dividir empequeñece?

Solución

$0,4 \cdot 50 = \mathbf{20}$, y 20 es menor que 50.

$50 \div 0,4 = 500 \div 4 = \mathbf{125}$, y 125 es mayor que 50.

$\frac{2}{3} \cdot 9 = 18/3 = \mathbf{6}$, y 6 es menor que 9.

No es verdad. Multiplicar un número positivo por un factor positivo que no llegue a la unidad lo encoge, y dividirlo entre ese mismo factor lo agranda. Lo que decide no es la operación, sino dónde cae el número que acompaña; y hace falta que los dos sean positivos, porque $-9 \div (1/2) = -18$, que es menor que -9 .

Ecuaciones de primer grado

Lo que hay que saber

Para quitar denominadores se multiplica cada miembro entero por un múltiplo común de todos ellos, distinto de cero. Multiplicar por cero convertiría la ecuación en $0 = 0$, una igualdad que cumple cualquier número: la ecuación dejaría de ser equivalente a la de partida y pasaría a admitir todas las soluciones.

▪ **Al quitar el denominador de una fracción con un menos delante, el paréntesis es obligatorio:** $-(x - 1) \cdot 2$ es $-2x + 2$, no $-2x - 2$.

Después se agrupan los términos semejantes: las x a un miembro y los números al otro, haciendo lo mismo a los dos miembros.

Hay tres finales posibles. Uno: $x =$ un número, y entonces hay una sola solución. Dos: se llega a $0 = 0$, o a una igualdad que se cumple sola, y entonces hay infinitas. Tres: se llega a un número igual a otro distinto, como $6 = 5$, y entonces no hay ninguna.

▲ **La comprobación se hace en la ecuación de partida**, no en una que ya se haya transformado. Si el error está en un paso intermedio, sustituir en la línea de después lo da por bueno.

16 Resuelve: $(x + 3)/4 - (x - 1)/6 = 1$

Solución

Se multiplican los dos miembros por un múltiplo común de 4 y 6. El menor es 12.

Al multiplicar, cada fracción entera va con su paréntesis: $3(x + 3) - 2(x - 1) = 12$.

$3x + 9 - 2x + 2 = 12$, o sea $x + 11 = 12$.

$x = 1$

Comprobación en la ecuación de partida: $(1 + 3)/4 - (1 - 1)/6 = 1 - 0 = 1$ OK

▪ El paréntesis del segundo trozo es obligatorio porque delante hay un menos. Sin él quedaría $3x + 9 - 2x - 1 = 12$ y saldría $x = 4$, que no cumple la ecuación: $(4+3)/4 - (4-1)/6 = 1,75 - 0,5 = 1,25$, y no 1.

17 Resuelve: $3(x - 2) - 2(x + 1) = x - 8$

Solución

Se quitan los paréntesis: $3x - 6 - 2x - 2 = x - 8$.

Se junta lo de la izquierda: $x - 8 = x - 8$.

Se resta x a los dos miembros: $-8 = -8$, o sea $0 = 0$.

La igualdad es cierta para cualquier valor de x , así que la ecuación tiene **infinitas soluciones**.

▪ Llegar a $0 = 0$ no significa que no haya solución ni que x valga 0: significa que valen todos. Se puede probar con $x = 5$: $3 \cdot 3 - 2 \cdot 6 = 9 - 12 = -3$, y $5 - 8 = -3$ OK

18 Resuelve: $2(x + 3) = 2x + 5$

Solución

Se quita el paréntesis: $2x + 6 = 2x + 5$.

Se resta $2x$ a los dos miembros: $6 = 5$, que es falso.

La ecuación **no tiene solución**: no hay ningún número que la cumpla.

Tiene sentido: a un número se le suma 6 en un lado y 5 en el otro, así que los dos lados no pueden coincidir.

▲ Este final y el del ejercicio anterior se parecen mucho y significan lo contrario: $0 = 0$ son todas las soluciones, y un número igual a otro distinto es ninguna.

19

El perímetro de un rectángulo mide **46 cm** y el largo tiene **5 cm más** que el ancho. Calcula los dos lados y el área.

Solución

Se llama x al ancho; entonces el largo es $x + 5$.

El perímetro son los cuatro lados: $2(x + x + 5) = 46$, o sea $4x + 10 = 46$.

$4x = 36$, así que $x = 9$.

El ancho mide **9 cm** y el largo **14 cm**.

Área = $9 \cdot 14 = 126 \text{ cm}^2$

Comprobación: $2 \cdot (9 + 14) = 2 \cdot 23 = 46 \text{ cm OK}$

Fíjate en que el perímetro va en cm y el área en cm^2 .

Sistemas de dos ecuaciones

Lo que hay que saber

Una solución del sistema es una **pareja de valores (x, y)** que cumple las dos ecuaciones a la vez.

Sustitución: se despeja una incógnita en una ecuación y se mete en la otra. Va bien cuando alguna ya está despejada o tiene coeficiente 1.

Reducción: se suman o se restan las dos ecuaciones para que una incógnita desaparezca; a veces hay que multiplicar antes alguna ecuación por un número.

Igualación: se despeja la misma incógnita en las dos y se igualan los resultados.

• **La comprobación se hace en las dos ecuaciones.** Una pareja equivocada puede cumplir una y fallar en la otra, y entonces comprobar solo una no descubre nada.

Si al operar se llega a $0 = 0$, el sistema tiene infinitas soluciones; si se llega a un número igual a otro distinto, no tiene ninguna.

20

Resuelve por sustitución: **$y = 2x - 1$ y $3x + y = 14$**

Solución

La primera ya da y despejada, así que se mete en la segunda en lugar de y .

$3x + (2x - 1) = 14 \rightarrow 5x - 1 = 14 \rightarrow 5x = 15 \rightarrow x = 3$.

Con $x = 3$: $y = 2 \cdot 3 - 1 = 5$.

La solución es **$x = 3$, $y = 5$** .

Comprobación en las dos: $5 = 2 \cdot 3 - 1 \text{ OK}$ y $3 \cdot 3 + 5 = 14 \text{ OK}$

21

Resuelve por reducción: **$2x + 3y = 16$ y $5x - 3y = 19$**

Solución

Los términos en y son $3y$ y $-3y$, así que se van sumando las dos ecuaciones tal cual.

$(2x + 5x) + (3y - 3y) = 16 + 19 \rightarrow 7x = 35 \rightarrow x = 5$.

Se lleva $x = 5$ a la primera: $2 \cdot 5 + 3y = 16 \rightarrow 3y = 6 \rightarrow y = 2$.

La solución es **$x = 5$, $y = 2$** .

Comprobación en las dos: $2 \cdot 5 + 3 \cdot 2 = 16 \text{ OK}$ y $5 \cdot 5 - 3 \cdot 2 = 25 - 6 = 19 \text{ OK}$

En un aparcamiento hay **coches y motos**: en total **30 vehículos** y **100 ruedas**. Cada coche tiene 4 ruedas y cada moto, 2. ¿Cuántos hay de cada?

Solución

Se llama c a los coches y m a las motos.

Vehículos: $c + m = 30$. Ruedas: $4c + 2m = 100$.

Dividiendo la segunda entre 2 queda $2c + m = 50$.

Restando la primera de esa: $(2c + m) - (c + m) = 50 - 30 \rightarrow c = 20$.

Y $m = 30 - 20 = 10$. Hay **20 coches y 10 motos**.

Comprobación en las dos: $20 + 10 = 30$ OK y $4 \cdot 20 + 2 \cdot 10 = 80 + 20 = 100$ OK

▪ Comprobar en una sola ecuación no descubre el error: la pareja $c = 25$, $m = 5$ cumple la de los vehículos ($25 + 5 = 30$) y falla en la de las ruedas ($4 \cdot 25 + 2 \cdot 5 = 110$, no 100).

Proporcionalidad directa e inversa

Lo que hay que saber

Directa: el cociente entre las dos magnitudes se mantiene igual: al doblar una, la otra se dobla, y al hacerla tres veces mayor, la otra también.

Inversa: lo que se mantiene igual es el producto. Si x se multiplica por un número, y queda dividida por ese número.

▪ «**A más de una, más de la otra**» no basta para decir que es directa. Hay que hacer la cuenta con todos los pares de datos que haya: dividirlos y ver si sale siempre lo mismo (directa), o multiplicarlos y ver si sale siempre lo mismo (inversa). Un par que no encaje lo descarta; que encajen dos pares no lo demuestra, porque (1, 2), (2, 4) y (3, 7) pasan la primera comparación y fallan en la siguiente.

Reducir a la unidad es el camino más seguro: averiguar cuánto le toca a uno y después multiplicar o dividir.

Reparto proporcional: se suman las partes, se divide el total entre esa suma y el resultado se multiplica por cada parte. ▲ Que los trozos sumen el total no basta: un reparto en partes iguales también suma el total, y dos errores que se compensen entre sí también.

Un grifo echa **45 litros en 6 minutos** a ritmo constante. ¿Cuántos litros echa en **14 minutos**? ¿Cuánto tarda en echar **300 litros**?

Solución

Lo que cae por minuto: $45 \div 6 = 7,5$ litros cada minuto. Es la constante de esta proporcionalidad, y por eso es directa.

En 14 minutos: $7,5 \cdot 14 = 105$ litros.

Para 300 litros: $300 \div 7,5 = 40$ minutos.

Comprobación: el cociente sale igual en los dos casos, $45/6 = 7,5$ y $105/14 = 7,5$. ▲ Eso confirma que las cuentas encajan; que la relación sea directa lo dice el enunciado al poner «a ritmo constante», porque con dos pares de datos sueltos no se puede afirmar. Y las unidades salen solas: litros $\div$ minutos da litros por minuto.

- 24** Ocho operarios levantan un muro en **15 días**. Con el mismo ritmo de trabajo, ¿cuánto tardarían **12 operarios**?

Solución

Aquí, al aumentar los operarios, los días bajan: es proporcionalidad inversa.

Lo que se conserva es el producto, que mide el trabajo total: $8 \cdot 15 = 120$ jornadas de un operario.

Con 12 operarios: $120 \div 12 = 10$ días.

Comprobación: $12 \cdot 10 = 120$ OK, el mismo producto.

▪ La regla de tres de la directa daría $12 \cdot 15 \div 8 = 22,5$ días, o sea más tiempo con más gente. Ese resultado incoherente avisa de que algo va mal, pero no dice qué: los mismos 22,5 días salen también de calcular mal $8 \cdot 15$ como 270 y dividir después entre 12.

- 25** Tres amigos ponen **20 €**, **30 €** y **50 €** para un boleto que reparte **450 €** de premio. Repártelo en partes proporcionales a lo que puso cada uno.

Solución

Lo aportado entre los tres: $20 + 30 + 50 = 100$ €.

Por cada euro puesto toca $450 \div 100 = 4,5$ € de premio. Esa es la constante del reparto.

Al primero: $20 \cdot 4,5 = 90$ €. Al segundo: $30 \cdot 4,5 = 135$ €. Al tercero: $50 \cdot 4,5 = 225$ €.

Comprobación: $90 + 135 + 225 = 450$ € OK

▲ Que las partes sumen el total no demuestra que el reparto esté bien: $150 + 150 + 150$ también suma 450 €, y $100 + 125 + 225$ lo suma igual con las dos primeras partes mal calculadas. Lo que hay que mirar es que cada parte salga de multiplicar lo aportado por el mismo número, 4,5.

Porcentajes, aumentos, descuentos e interés

Lo que hay que saber

Para hallar el **p %** de una cantidad se multiplica esa cantidad por **p** y se divide entre 100.

Aumentar un p % es multiplicar por $(1 + p \div 100)$; **descontar un p %** es multiplicar por $(1 - p \div 100)$. Subir un 10 % es multiplicar por 1,1 y bajar un 10 %, por 0,9.

▪ **Dos porcentajes encadenados no se acumulan sumándolos: lo que se multiplica son los factores de aumento o de descuento, no los porcentajes.** Subir un 10 % y luego bajar un 10 % deja $1,1 \cdot 0,9 = 0,99$, o sea un 1 % menos que al empezar. Y dos subidas del 10 % dan 1,21, que es un 21 %, no un 20 %.

Porcentaje de variación = $(\text{valor final} - \text{valor inicial}) \div \text{valor inicial} \cdot 100$. ▲ Puede pasar del 100 % sin que haya ningún error: eso solo quiere decir que el cambio es mayor que el valor de partida.

Para deshacer una rebaja se divide entre el índice, no se vuelve a restar: si algo rebajado un 30 % cuesta 63 €, antes costaba $63 \div 0,7$.

Interés simple: los intereses de cada año se calculan sobre el capital inicial y no se acumulan. Interés de un año = $\text{capital} \cdot \text{tanto por ciento} \div 100$; después se multiplica por los años.

- 26** Un móvil cuesta **240 €**. En enero sube un **10 %** y en marzo baja un **10 %**. ¿Cuánto cuesta después de las dos cosas?

Solución

Subir un 10 % es multiplicar por 1,1: $240 \cdot 1,1 = 264$ €.

Bajar un 10 % es multiplicar por 0,9, pero del precio que hay ahora: $264 \cdot 0,9 = 237,60$ €.

No se vuelve a los 240 €. La subida se calcula sobre 240 € y la bajada sobre 264 €, que es más, así que se quita más de lo que se había puesto: 24 € frente a 26,40 €.

▲ Encadenar porcentajes es multiplicar los índices: $1,1 \cdot 0,9 = 0,99$, o sea una bajada final del 1 %.

27 Un libro pasa de costar **12 €** a costar **30 €**. ¿Qué porcentaje ha subido?

Solución

La subida en euros: $30 - 12 = 18$ €.

El porcentaje se calcula sobre el precio de partida: $18 \div 12 = 1,5$.

$1,5 \cdot 100 = \mathbf{150\%}$

Que pase del 100 % no es un error: quiere decir que la subida es mayor que el precio inicial, y es lo que pasa cuando algo se hace más del doble de caro. Comprobación: $12 \cdot 2,5 = 30$ OK

28 Una chaqueta rebajada un **30 %** se paga a **63 €**. ¿Cuál era el precio antes de la rebaja?

Solución

Si descuentan el 30 %, se paga el 70 %, o sea el precio antiguo multiplicado por 0,7.

Llamando p al precio antiguo: $0,7 \cdot p = 63$.

$p = 63 \div 0,7 = 630 \div 7 = \mathbf{90\ €}$

Comprobación: $90 \cdot 0,7 = 63$ € OK

▪ Quitarle el 30 % a los 63 € daría 44,10 €, que es el camino contrario. Para deshacer una rebaja hay que dividir entre el índice, no volver a restar.

29 Se ingresan **2.500 €** al **3 % anual** durante **4 años** a interés simple. Calcula los intereses y el dinero que hay al final.

Solución

Interés simple quiere decir que cada año se ganan los intereses del capital inicial, sin que se acumulen.

Interés de un año: $2.500 \cdot 3 \div 100 = 75$ €.

En cuatro años: $75 \cdot 4 = \mathbf{300\ €}$ de intereses.

Al final hay $2.500 + 300 = \mathbf{2.800\ €}$.

▲ Con interés compuesto saldría algo más, porque los intereses del primer año también generarían intereses. Aquí el enunciado dice «simple», y esa palabra es la que manda.

Teorema de Pitágoras

Lo que hay que saber

Solo en triángulos rectángulos: el cuadrado de la hipotenusa es la suma de los cuadrados de los catetos.

Para la hipotenusa se suma y se saca la raíz; **para un cateto se resta** el cuadrado del otro cateto al de la hipotenusa.

Al revés también sirve: si en un triángulo el cuadrado del lado mayor coincide con la suma de los cuadrados de los otros dos, ese triángulo es rectángulo. Si no coincide, no lo es, aunque el triángulo exista.

▲ **La hipotenusa es mayor que cualquiera de los catetos**, porque se le suma algo positivo al cuadrado de cada uno. Sirve de comprobación: un cateto que salga mayor que la hipotenusa delata que hay un error, y el primer sitio donde mirar es si se ha sumado en vez de restar.

La altura de un triángulo isósceles sobre su base lo parte en dos triángulos rectángulos iguales, y el cateto de cada uno es la mitad de esa base.

30

Un triángulo rectángulo tiene los catetos de **9 cm** y **12 cm**. Calcula la hipotenusa.

Solución

$$h^2 = 9^2 + 12^2 = 81 + 144 = 225$$

$$h = \sqrt{225} = \mathbf{15 \text{ cm}}$$

Comprobación de sentido: 15 cm es mayor que 9 cm y que 12 cm, como tiene que ser. Si hubiera salido un número menor que 12, la cuenta estaría mal.

31

La hipotenusa de un triángulo rectángulo mide **26 cm** y uno de sus catetos, **10 cm**. Calcula el otro cateto.

Solución

Para un cateto se resta, no se suma: $c^2 = 26^2 - 10^2$.

$$676 - 100 = 576, \text{ y } \sqrt{576} = \mathbf{24 \text{ cm.}}$$

Comprobación: $10^2 + 24^2 = 100 + 576 = 676 = 26^2$ OK

▪ Sumar en vez de restar da $\sqrt{776}$, un número entre 27 cm y 28 cm: mayor que la hipotenusa de 26 cm. Un cateto mayor que la hipotenusa avisa de que la cuenta está mal; aquí el fallo ha sido sumar donde tocaba restar.

32

¿Es rectángulo un triángulo de lados **8 cm**, **15 cm** y **17 cm**? ¿Y uno de **3 cm**, **4 cm** y **6 cm**?

Solución

Se compara el cuadrado del lado mayor con la suma de los cuadrados de los otros dos.

Primero: $8^2 + 15^2 = 64 + 225 = 289$, y $17^2 = 289$. Coinciden → **sí es rectángulo**.

Segundo: $3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25$, y $6^2 = 36$. No coinciden → **no es rectángulo**.

▪ El segundo triángulo existe ($3 + 4 = 7$, que pasa de 6) pero no es rectángulo. Ahí está el límite del teorema: vale para los triángulos rectángulos y para reconocerlos, y con los demás la igualdad no se cumple.

33

Un triángulo isósceles mide **16 cm** en su base y **17 cm** cada uno de los dos lados iguales. Halla la altura sobre esa base y el área.

Solución

La altura sobre la base lo parte en dos triángulos rectángulos iguales; en cada uno, un cateto vale $16 \div 2 = 8 \text{ cm}$ y la hipotenusa mide 17 cm.

$$\text{altura}^2 = 17^2 - 8^2 = 289 - 64 = 225, \text{ así que la altura es } \mathbf{15 \text{ cm.}}$$

$$\text{Área} = 16 \cdot 15 \div 2 = \mathbf{120 \text{ cm}^2}$$

▲ El 8 sale de partir la base por la mitad, y eso solo pasa porque los dos lados son iguales. En un triángulo con los tres lados distintos, la altura no cae en el punto medio.

Cuerpos geométricos: área y volumen

Lo que hay que saber

Prisma recto: volumen = área de la base · altura. Área lateral = perímetro de la base · altura. Área total = lateral + las dos bases. En un prisma inclinado el área lateral ya no se calcula así.

Cilindro recto: volumen = $\pi \cdot \text{radio}^2 \cdot \text{altura}$. Área lateral = $2 \cdot \pi \cdot \text{radio} \cdot \text{altura}$.

Pirámide y cono: volumen = área de la base · altura ÷ 3. Son la tercera parte del prisma y del cilindro que tienen su misma base y su misma altura.

Esfera: área = $4 \cdot \pi \cdot \text{radio}^2$. Y volumen = $4 \cdot \pi \cdot \text{radio}^3 \div 3$.

▪ **Todas las medidas, a la misma unidad ANTES de multiplicar.** Un fallo de unidad da un número creíble y no se descubre mirando el resultado: hay que convertir primero. Hay que sabérselo: un litro llena justo un cubo de 1 dm de lado, o sea 1.000 centímetros cúbicos.

▲ **Si todas las medidas de un cuerpo se multiplican por 2**, el área queda multiplicada por 4 y el volumen por 8, porque el largo entra dos veces en un área y tres en un volumen.

- 34** Un prisma recto tiene por base un cuadrado de **6 cm de lado** y mide **10 cm de altura**. ¿Cuánto miden su área total y su volumen?

Solución

Área de una base: $6 \cdot 6 = 36 \text{ cm}^2$. Son dos bases: 72 cm^2 .

Área lateral = perímetro de la base · altura = $(4 \cdot 6) \cdot 10 = 24 \cdot 10 = 240 \text{ cm}^2$.

Área total = $240 + 72 = 312 \text{ cm}^2$

Volumen = área de la base · altura = $36 \cdot 10 = 360 \text{ cm}^3$

Las unidades avisan de los despistes: el área va en cm^2 y el volumen en cm^3 .

- 35** Un depósito con forma de cilindro tiene **20 cm de radio** y **1,5 m de altura**. Calcula su volumen en cm^3 y en litros ($\pi \approx 3,14$).

Solución

Lo primero es poner las dos medidas en la misma unidad: $1,5 \text{ m} = 150 \text{ cm}$.

Volumen = $\pi \cdot r^2 \cdot \text{altura} = 3,14 \cdot 20^2 \cdot 150 = 3,14 \cdot 400 \cdot 150$.

$3,14 \cdot 400 = 1.256$, y $1.256 \cdot 150 = 188.400 \text{ cm}^3$.

Como 1 litro son 1.000 cm^3 : $188.400 \div 1.000 = 188,4 \text{ litros}$.

▪ Este error no se descubre solo. Si la altura se deja en 1,5 sin pasarla a centímetros, sale $3,14 \cdot 400 \cdot 1,5 = 1.884 \text{ cm}^3$, que son 1,884 litros: el tamaño de una botella grande, un número perfectamente creíble para un depósito pequeño. Lo que lo evita es pasar todas las medidas a la misma unidad ANTES de multiplicar, no mirar si el resultado «parece raro».

- 36** Una pirámide tiene por base un cuadrado de **9 cm de lado** y mide **8 cm de altura**. Calcula su volumen y compáralo con el del prisma que tiene esa misma base y esa misma altura.

Solución

Área de la base: $9 \cdot 9 = 81 \text{ cm}^2$.

Volumen de la pirámide = área de la base · altura ÷ 3 = $81 \cdot 8 \div 3 = 648 \div 3 = 216 \text{ cm}^3$.

El prisma con la misma base y la misma altura: $81 \cdot 8 = 648 \text{ cm}^3$.

$648 \div 216 = 3$, así que **el prisma es el triple**. Dicho al revés, la pirámide es un tercio del prisma, y esa es la razón de ser del «÷ 3» de la fórmula.

▪ Olvidar el «÷ 3» da 648 cm^3 para la pirámide, es decir, el volumen del prisma entero.

37

Una esfera tiene **3 cm de radio** ($\pi \approx 3,14$). Calcula su área y su volumen. Si el radio se dobla, ¿por cuánto queda multiplicado el volumen?

Solución

$$\text{Área} = 4 \cdot \pi \cdot r^2 = 4 \cdot 3,14 \cdot 9 = \mathbf{113,04 \text{ cm}^2}$$

$$\text{Volumen} = 4 \cdot \pi \cdot r^3 \div 3 = 4 \cdot 3,14 \cdot 27 \div 3 = 339,12 \div 3 = \mathbf{113,04 \text{ cm}^3}$$

$$\text{Con radio 6 cm: volumen} = 4 \cdot 3,14 \cdot 216 \div 3 = 2.712,96 \div 3 = 904,32 \text{ cm}^3.$$

$904,32 \div 113,04 = 8$, así que **el volumen se multiplica por 8**, no por 2.

▲ La razón es que el radio aparece tres veces multiplicado en el volumen: $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$. En el área aparece dos veces, así que el área se haría 4 veces mayor.

▲ Que el área y el volumen den el mismo número, 113,04, es una casualidad del radio 3 y de nada más. Las unidades son distintas: cm^2 y cm^3 .

Funciones y la recta

Lo que hay que saber

Una función asigna a cada valor de x **un único valor** de y . Se puede dar escrita ($y = 3x - 2$) o como lista de pares (x, y) .

$y = mx + n$: m es la **pendiente** (lo que sube o baja y cuando x avanza una unidad) y n es la **ordenada en el origen** (el valor de y cuando x vale 0).

Pendiente con dos puntos: $(y \text{ del segundo} - y \text{ del primero}) \div (x \text{ del segundo} - x \text{ del primero})$, y los dos puntos tienen que tener distinta x : con $(2, 1)$ y $(2, 7)$ el divisor saldría 0 y la recta es vertical, sin pendiente.

▲ El orden tiene que ser el mismo arriba y abajo, o el signo sale cambiado.

Cortes con los ejes: con el eje vertical, se hace $x = 0$. Con el eje horizontal, se hace $y = 0$ y se resuelve la ecuación.

▪ **La pendiente solo se lee directamente cuando y está despejada.** En $4x - 2y = 6$ hay que despejar primero: queda $y = 2x - 3$ y la pendiente es 2, no 4.

▲ **Una recta describe proporcionalidad directa solo si n vale 0**, es decir, si pasa por el punto $(0, 0)$. Con $y = 3 + 0,5x$ el precio no se dobla al doblar x .

38

De la función **$y = 3x - 2$** , calcula los valores de y para $x = -1, 0, 1$ y 2 , y di en qué puntos corta a los dos ejes.

Solución

$$x = -1 \rightarrow y = 3 \cdot (-1) - 2 = -5. \quad x = 0 \rightarrow y = -2. \quad x = 1 \rightarrow y = 1. \quad x = 2 \rightarrow y = 4.$$

Los cuatro puntos son **$(-1, -5)$, $(0, -2)$, $(1, 1)$ y $(2, 4)$** .

Corte con el eje vertical: es el punto de $x = 0$, o sea **$(0, -2)$** . Ese -2 es la ordenada en el origen.

Corte con el eje horizontal: allí y vale 0, así que $3x - 2 = 0 \rightarrow x = 2/3$. El punto es **$(2/3, 0)$** .

Fíjate en que al pasar x de 0 a 1 el valor sube 3 unidades, y de 1 a 2 vuelve a subir 3: ese salto constante es la pendiente.

39

Una recta pasa por los puntos **$(2, 7)$ y $(5, 1)$** . Calcula su pendiente y escribe su ecuación.

Solución

Pendiente = $(\text{diferencia de las } y) \div (\text{diferencia de las } x)$, tomando los dos puntos en el mismo orden:
 $(1 - 7) \div (5 - 2) = -6 \div 3 = \mathbf{-2}$.

Con $m = -2$ la recta es $y = -2x + n$. Se mete uno de los puntos para hallar n : $7 = -2 \cdot 2 + n \rightarrow 7 = -4 + n \rightarrow n = 11$.

La ecuación es $y = -2x + 11$.

Comprobación con el otro punto: $-2 \cdot 5 + 11 = -10 + 11 = 1$ OK

▲ Si se cambia el orden en un solo lado de la división, la pendiente sale con el signo cambiado: $(7 - 1) \div (5 - 2)$ daría 2 en vez de -2 . Hay que respetar el mismo orden arriba y abajo.

40 Escribe en la forma $y = mx + n$ y di la pendiente de cada una: $2x + y = 5$ y $4x - 2y = 6$.

Solución

La primera: $y = 5 - 2x$, es decir $y = -2x + 5$. Pendiente -2 .

La segunda: $-2y = 6 - 4x$. Al dividir los dos miembros entre -2 queda $y = -3 + 2x$, es decir $y = 2x - 3$. Pendiente 2 .

■ Leer la pendiente sin despejar da 4 en la segunda, y la pendiente es 2. El número que acompaña a la x solo es la pendiente cuando la y está sola en un miembro y con coeficiente 1.

41 Un taxi cobra **3 € fijos** al empezar y **0,50 € por kilómetro**. Escribe la función del precio, calcula lo que cuestan 2 km y 4 km, y di si el precio es directamente proporcional a los kilómetros.

Solución

Llamando x a los kilómetros: $y = 3 + 0,5x$.

2 km: $y = 3 + 0,5 \cdot 2 = 4$ €. 4 km: $y = 3 + 0,5 \cdot 4 = 5$ €.

No es proporcionalidad directa. Al doblar los kilómetros el precio no se dobla: pasa de 4 € a 5 €.

La cuenta que lo demuestra: $4 \div 2 = 2$ €/km y $5 \div 4 = 1,25$ €/km, y esos dos cocientes tendrían que coincidir si fuera directa.

▲ La culpa es de los 3 € fijos. Una recta describe proporcionalidad directa solo cuando pasa por el punto $(0, 0)$, y esta pasa por $(0, 3)$.

Estadística: medidas y frecuencias

Lo que hay que saber

Frecuencia absoluta: cuántas veces aparece un dato. **Frecuencia relativa:** esa cantidad dividida entre el total. Las relativas de todos los datos suman 1, y en porcentaje suman 100 %.

Media = suma de los datos $\div$ cuántos datos hay. ▲ Comprobación: tiene que quedar entre el dato menor y el dato mayor.

Mediana = el valor central después de ponerlos en orden. Con un número par de datos hay dos centrales, y la mediana es su media, así que puede no coincidir con ningún dato.

Moda = el dato que aparece más veces. ▲ Puede haber dos o más modas, y puede no haber ninguna si todos los datos aparecen las mismas veces.

Rango = dato mayor – dato menor. Dice cuánto se separan los extremos.

Media ponderada: cuando cada valor se repite, se multiplica cada uno por las veces que aparece, se suma todo y se divide entre el total de datos. Hacer la media de los valores distintos, sin contar las repeticiones, puede dar otro número, y en todo caso no es un procedimiento válido: con los datos 1, 2, 2 y 3 las dos medias salen 2 y aun así está mal hecho.

42

Estas son las notas de diez alumnos: **4, 6, 7, 5, 9, 6, 8, 6, 7, 2**. Calcula la media, la moda, la mediana y el rango.

Solución

Suma de las diez notas: $4 + 6 + 7 + 5 + 9 + 6 + 8 + 6 + 7 + 2 = 60$.

Media = $60 \div 10 = 6$

Puestas en orden: 2, 4, 5, 6, 6, 6, 7, 7, 8, 9.

Moda: el dato que aparece más veces es el **6**, que sale tres veces.

Mediana: hay diez notas, un número par, así que los centrales son el quinto y el sexto, los dos 6. La mediana es $(6 + 6) \div 2 = 6$.

Rango = $9 - 2 = 7$

Comprobación de sentido: la media, 6, queda entre la nota menor (2) y la mayor (9), como tiene que ocurrir. Una media fuera de ese tramo delata un error en la cuenta, sin decir en cuál.

43

En un grupo, **5 alumnos miden 160 cm, 8 miden 165 cm y 7 miden 170 cm**. Calcula la estatura media del grupo.

Solución

Cada estatura vale por los alumnos que la tienen: es una media ponderada.

Los cinco primeros aportan $5 \cdot 160 = 800$ cm; los ocho siguientes, $8 \cdot 165 = 1.320$ cm; y los siete últimos, $7 \cdot 170 = 1.190$ cm.

Suma de las estaturas: $800 + 1.320 + 1.190 = 3.310$ cm.

Alumnos: $5 + 8 + 7 = 20$.

Media = $3.310 \div 20 = 165,5$ cm

▪ Hacer $(160 + 165 + 170) \div 3 = 165$ cm trata los tres grupos como si fueran del mismo tamaño, y no lo son. El 165,5 se va hacia arriba porque hay más gente alta que baja.

44

Halla la moda de estos datos: **2, 2, 3, 3, 5**. Y la de estos otros: **1, 2, 3, 4**.

Solución

En el primer grupo el 2 sale dos veces y el 3 también sale dos veces, y ninguno llega a tres. Hay **dos modas: el 2 y el 3**.

En el segundo grupo cada dato sale una sola vez, así que **no hay moda**.

▪ Por eso hay que contar todos los datos antes de responder: la moda puede ser doble, o puede faltar. Elegir el primero que se repite dejaría fuera al 3 en el primer grupo.

45

De **25 partidos**, un equipo gana **13**, empata **7** y pierde **5**. Calcula la frecuencia relativa de cada resultado y el porcentaje de victorias.

Solución

Frecuencia relativa = veces que pasa $\div$ total de partidos.

Victorias: $13 \div 25 = 0,52$. Empates: $7 \div 25 = 0,28$. Derrotas: $5 \div 25 = 0,2$.

Porcentaje de victorias: $0,52 \cdot 100 = 52$ %.

Comprobación: $0,52 + 0,28 + 0,2 = 1$, y en porcentaje $52 + 28 + 20 = 100$ %. Si la suma no diera 1, habría un error en alguna parte —el recuento, una de las divisiones o la propia suma—, pero la comprobación no dice en cuál.