

Ejercicios Resueltos de Matemáticas 3 ESO 2026 / 2027

46 ejercicios con la solución explicada paso a paso, y la teoría de los 13 temas que trae esta selección.

Lo que vas a practicar

Fracciones, decimales y fracción generatriz · Pasar un decimal periódico a fracción y saber de antemano si un decimal va a terminar (**ejercicios 1, 2, 3**)

Potencias de exponente entero y notación científica · Operar con potencias de la misma base y multiplicar, dividir y sumar en notación científica (**ejercicios 4, 5, 6, 7**)

Monomios, polinomios e identidades notables · Sumar, restar y multiplicar polinomios, y desarrollar los tres productos que conviene saberse de memoria (**ejercicios 8, 9, 10, 11**)

Factorización, Ruffini y teorema del resto · Sacar factor común, usar las identidades al revés y dividir entre $x - a$ sin hacer la división larga (**ejercicios 12, 13, 14, 15**)

Ecuaciones de segundo grado · Las incompletas, la fórmula general y cuándo una solución no sirve para el problema (**ejercicios 16, 17, 18, 19**)

Sistemas de ecuaciones: igualación y casos raros · El método de igualación, los sistemas sin solución o con infinitas, y plantear un problema con dos incógnitas (**ejercicios 20, 21, 22**)

El teorema de Pitágoras en el espacio · Aplicarlo dos veces seguidas para la diagonal de una caja, y usarlo en triángulos que no vienen dados como rectángulos (**ejercicios 23, 24, 25**)

Semejanza y teorema de Tales · Reconocer triángulos semejantes, montar bien la proporción y medir alturas a las que no se llega (**ejercicios 26, 27, 28, 29**)

Cuerpos geométricos: volúmenes compuestos y capacidad · Sumar y restar volúmenes de piezas, y pasar de centímetros cúbicos a litros (**ejercicios 30, 31, 32**)

Movimientos en el plano: traslaciones, giros y simetrías · Calcular con coordenadas adónde va cada punto, y encadenar dos movimientos (**ejercicios 33, 34, 35, 36**)

Funciones: cortes con los ejes, crecimiento y funciones a trozos · Calcular imágenes y cortes a partir de la expresión escrita, y manejar una función con dos trozos (**ejercicios 37, 38, 39, 40**)

Estadística: tablas de frecuencias y datos agrupados · Construir la tabla, usar las frecuencias acumuladas y calcular la media con intervalos (**ejercicios 41, 42, 43**)

Probabilidad: sucesos, unión e intersección · Contar bien los casos posibles y sumar probabilidades sin contar nada dos veces (**ejercicios 44, 45, 46**)

Material propio de solucionario.es. Los enunciados y las soluciones están escritos por nosotros. La versión al día, con más ejercicios y de todos los cursos, está siempre en:

solucionario.es

Qué entra aquí y qué no. ▲ En 3º de ESO hay una sola Matemáticas: el currículo vigente (RD 217/2022) pone una única Matemáticas, sin apellido, en cada uno de los tres primeros cursos, y la división en **Matemáticas A** y **Matemáticas B** llega en 4º. Con la ley anterior sí había dos itinerarios en 3º, «académicas» y «aplicadas», y por eso todavía se buscan con esos nombres; si has llegado buscando uno de los dos, esta página es igualmente la tuya. Entran los trece temas del cuadro: fracciones y fracción generatriz, potencias de exponente entero y notación científica, polinomios e identidades notables, factorización con Ruffini y teorema del resto, ecuaciones de segundo grado, sistemas por igualación, el teorema de Pitágoras en el espacio, semejanza y Tales, volúmenes de cuerpos compuestos y capacidad, movimientos en el plano, funciones con sus cortes y las definidas a trozos, estadística con datos agrupados, y probabilidad con unión e intersección. **Quedan fuera a propósito**, porque los trabaja la página de 4º de ESO y no tiene sentido contarlos dos veces: los radicales y su simplificación, clasificar por el signo de $b^2 - 4ac$ cuántas soluciones tiene una ecuación, las progresiones, la trigonometría, la geometría analítica y la desviación típica. Es un reparto nuestro entre páginas, no una raya que marque la ley. Se da por sabido lo de 2º: los enteros, las fracciones, el redondeo, la ecuación de primer grado, los sistemas por sustitución y reducción, los porcentajes, el enunciado de Pitágoras y las fórmulas del área y el volumen. Los movimientos del plano se trabajan **con coordenadas**, y cada cuerpo viene **descrito con sus medidas**: todo se resuelve con lápiz, papel y una calculadora corriente, sin necesidad de consultar nada más. Esto sirve para localizar lo que flojea; no sustituye al libro ni a las clases.

Fracciones, decimales y fracción generatriz

Lo que hay que saber

Decimal con final a fracción. Debajo va la potencia de 10 que corresponde al número de cifras decimales, y después se simplifica hasta la **fracción irreducible**: $0,56 = 56/100 = 14/25$.

Periódico puro (el trozo que se repite empieza justo después de la coma). Se llama N al número, se multiplica por 10 tantas veces como cifras tiene ese trozo y se resta N. Los decimales se van y debajo quedan tantos nueves como cifras se repiten.

Periódico mixto (hay cifras entre la coma y el trozo que se repite). Hacen falta dos multiplicaciones, una que deje el trozo repetido pegado a la coma y otra que lo adelante una vuelta; al restar, debajo quedan nueves seguidos de ceros.

Saber de antemano si un decimal terminará. Se simplifica la fracción y se mira su denominador: si solo tiene doses y cincos, el decimal termina; si aparece cualquier otro factor primo, se repite. Que el denominador sea par no decide nada por sí solo.

Comparar. Lo más seguro es pasar todo a un denominador común, o bien pasar todo a decimal. Mezclar los dos criterios a ojo es lo que lleva a colocar mal un número.

- 1 Escribe como fracción irreducible: (a) **0,56**; (b) **1,333...** (el 3 se repite sin final); (c) **0,4666...** (se repite solo el 6).

Solución

(a) Tiene final, así que debajo va la potencia de 10 que corresponde a sus dos cifras decimales: $56/100$. Se simplifica dividiendo arriba y abajo entre 4 y queda **$14/25$** .

(b) Se llama $N = 1,333...$ y se multiplica por 10, que es lo que hace falta para que el trozo que se repite quede en el mismo sitio: $10N = 13,333...$

Al restar, los decimales se van: $10N - N = 13,333... - 1,333... = 12$, o sea $9N = 12$ y **$N = 12/9 = 4/3$** . Se corrige solo haciendo $4 \div 3 = 1,333...$

(c) Aquí hay una cifra entre la coma y el trozo que se repite, así que hacen falta dos multiplicaciones: $100N = 46,666...$ y $10N = 4,666...$

Restando: $90N = 42$, y **$N = 42/90 = 7/15$** . Se corrige solo haciendo $7 \div 15 = 0,4666...$

- 2 Sin hacer ninguna división, di cuáles de estas cuatro dan un decimal con final: **$7/40$** , **$5/12$** , **$9/24$** y **$11/50$** . Justifica cada una.

Solución

La regla mira los factores primos del denominador *de la fracción ya simplificada*: si solo hay doses y cincos, el decimal termina.

$7/40$ termina: $40 = 2 \times 2 \times 2 \times 5$, solo doses y un cinco. Vale $0,175$.

$5/12$ no termina: $12 = 2 \times 2 \times 3$, y ese 3 lo estropea. Vale $0,41666...$

$9/24$ sí termina, y es el que obliga a fijarse: 24 tiene un 3, pero la fracción *no está simplificada*. $9/24 = 3/8$, y $8 = 2 \times 2 \times 2$. Vale $0,375$.

$11/50$ termina: $50 = 2 \times 5 \times 5$. Vale $0,22$.

▲ Que el denominador sea par no basta: 12 es par y $5/12$ no termina. Lo que decide es que *solo* haya doses y cincos, y para verlo hay que simplificar primero.

3

Ordena de menor a mayor: $-3/4$, $0,7$, $-0,75$, $5/8$ y $2/3$.

Solución

Primero los negativos, que van delante de todos los positivos. $-3/4 = -0,75$, así que $-3/4$ y $-0,75$ son el mismo número escrito de dos formas.

Para los tres positivos conviene un denominador común: el mínimo común múltiplo de 8, 3 y 10, que vale 120. Y $0,7$ se escribe como $7/10$.

$5/8 = 75/120$, porque $120 \div 8 = 15$ y $5 \times 15 = 75$. Después $2/3 = 80/120$ y $7/10 = 84/120$.

Con el mismo denominador basta con mirar los de arriba: $75 < 80 < 84$.

Queda $-3/4 = -0,75 < 5/8 < 2/3 < 0,7$. Se corrige solo pasando los tres positivos a decimal: $0,625$, luego $0,666\dots$ y luego $0,7$, en ese mismo orden.

Potencias de exponente entero y notación científica

Lo que hay que saber

Dos potencias de igual base se multiplican sumando sus exponentes y se dividen restándolos, y para dividir esa base no puede ser 0; elevar una potencia a otro exponente multiplica los dos exponentes entre sí.

Exponente negativo: a^{-n} es 1 dividido entre a^n , y por eso la base tiene que ser distinta de 0. El signo del exponente *no* decide el signo del resultado: lo deciden el signo de la base y si el exponente es par o impar.

Notación científica: un número que, sin contar el signo, va de 1 a 10 sin llegar a 10, multiplicado por una potencia de 10; el 0 no se escribe así. El exponente cuenta los lugares que se mueve la coma, y es negativo cuando el número de partida, también sin contar su signo, es menor que 1: por eso -200 se escribe -2×10^2 aunque sea menor que 1.

Multiplicar y dividir: por un lado los números de delante y por otro las potencias. Si el número de delante se sale del tramo de 1 a 10, hay que recolocarlo, y eso cambia el exponente final.

Sumar y restar: primero hay que llevar los dos números al mismo exponente. Juntar los números de delante antes de igualarlos da un resultado equivocado.

4

Calcula y deja el resultado como una fracción o como un entero: (a) $(2^{-3} \times 2^5) \div 2^4$; (b) $(3^{-2})^{-1}$; (c) $(-2)^{-3}$.

Solución

(a) Con la misma base, al multiplicar se suman los exponentes y al dividir se restan: $-3 + 5 - 4 = -2$. Queda $2^{-2} = 1/4$.

(b) Una potencia de otra potencia multiplica los exponentes: $(-2) \times (-1) = 2$. Queda $3^2 = 9$.

(c) El exponente negativo da la vuelta: $(-2)^{-3} = 1 \div (-2)^3 = 1 \div (-8) = -1/8$.

Se corrige solo escribiendo las tres sin exponentes negativos y operando: en (a), $2^5 \div (2^3 \times 2^4) = 32 \div 128 = 1/4$; en (b), $1 \div (1 \div 3^2) = 9$; y en (c), $1 \div (-8) = -1/8$.

▲ En (c) el resultado sale negativo, pero no por el signo del exponente: lo pone la base, que es negativa, junto con el exponente impar. En (a) el exponente también es negativo y el resultado, $1/4$, es positivo.

5

Escribe en notación científica **0,00000315** y **47.800.000**, y calcula $(2,5 \times 10^6) \times (4 \times 10^{-9})$ dejando el resultado también en notación científica.

Solución

0,00000315 = $3,15 \times 10^{-6}$. La coma se mueve seis lugares a la derecha hasta dejar una sola cifra distinta de cero delante, y por eso el exponente es -6 .

47.800.000 = $4,78 \times 10^7$. Aquí la coma se mueve siete lugares a la izquierda y el exponente sale positivo.

En el producto van por un lado los números de delante y por otro las potencias: $2,5 \times 4 = 10$ y $10^6 \times 10^{-9} = 10^{-3}$. De momento, 10×10^{-3} .

Eso todavía no está en notación científica, porque delante tiene que haber un número entre 1 y 10 sin llegar a 10. Se recoloca: $10 = 1 \times 10^1$, así que el resultado es 1×10^{-2} , es decir 0,01.

Se corrige solo escribiendo el producto sin potencias: $2,5 \times 10^6$ son 2.500.000 y 4×10^{-9} son 0,000000004; al multiplicarlos vuelve a salir 0,01.

▲ Por eso no vale decir que el exponente del resultado es la suma de los dos exponentes: aquí la suma da -3 y el resultado lleva -2 . El número de delante puede cambiar el exponente.

6

Calcula $3,4 \times 10^5 + 8,7 \times 10^4$ y da el resultado en notación científica.

Solución

Para sumar hace falta que los dos tengan **el mismo exponente**. Se sube el segundo a 10^5 moviendo su coma un lugar a la izquierda: $8,7 \times 10^4 = 0,87 \times 10^5$.

Ahora sí se suman los números de delante: $3,4 + 0,87 = 4,27$.

El resultado es $4,27 \times 10^5$, que ya está bien escrito porque 4,27 está entre 1 y 10.

Se corrige solo escribiéndolo todo sin potencias: $340.000 + 87.000 = 427.000$, y $427.000 = 4,27 \times 10^5$.

▲ Sumar 3,4 y 8,7 directamente daría 12,1, que no es el número de delante de nada: hasta que los exponentes no coinciden, esos dos números miden cosas de tamaño distinto.

7

Un glóbulo rojo mide 7×10^{-6} m de diámetro y una bacteria, 2×10^{-6} m. (a) ¿Cuántas veces mayor es el glóbulo? (b) ¿Cuántos glóbulos rojos puestos en fila, tocándose, caben en **1 mm**?

Solución

(a) Se dividen las dos medidas: $(7 \times 10^{-6}) \div (2 \times 10^{-6})$. Los números de delante dan $7 \div 2 = 3,5$ y las potencias se van, porque $10^{-6} \div 10^{-6} = 10^0 = 1$.

El glóbulo es **3,5 veces mayor**. Al dividir dos longitudes el resultado no lleva unidad, y eso es lo que tiene que pasar cuando se compara un tamaño con otro.

(b) 1 mm son 10^{-3} m, así que hay que hacer $(1 \times 10^{-3}) \div (7 \times 10^{-6})$.

Los números de delante dan $1 \div 7$ y las potencias, $10^{-3} \div 10^{-6} = 10^3$. Sale $1.000 \div 7 = 142,857\dots$

Caben **142 glóbulos enteros**, y sobra un trozo. Se corrige solo multiplicando hacia atrás por los dos lados: $142 \times 7 \times 10^{-6} \text{ m} = 9,94 \times 10^{-4} \text{ m}$, algo menos que el milímetro; y $143 \times 7 \times 10^{-6} \text{ m} = 1,001 \times 10^{-3} \text{ m}$, algo más. Hacen falta las dos cuentas: con la primera sola quedaría sin descartar que cupieran 143.

Monomios, polinomios e identidades notables

Lo que hay que saber

Términos semejantes son los que tienen exactamente la misma parte con letras. Únicamente entre ellos cabe sumar o restar; los demás se quedan tal como están.

Al restar un polinomio se cambia el signo de todos sus términos, no solo del primero. El grado del resultado puede bajar si los términos de mayor grado se anulan entre sí.

Valor numérico: se sustituye la letra por el número y se opera respetando la jerarquía. Las potencias se calculan antes que los productos.

Las tres identidades notables, escritas con m y n : $(m + n)^2 = m^2 + 2mn + n^2$; $(m - n)^2 = m^2 - 2mn + n^2$; y $(m + n)(m - n) = m^2 - n^2$. En las dos primeras, el término del medio es el que hay que escribir antes de dar el desarrollo por terminado.

Al multiplicar dos polinomios, cada término del primero multiplica a cada término del segundo, y el grado del resultado es la suma de los dos grados: eso da una primera señal de si falta algo.

- 8 Con $P(x) = 3x^3 - 2x + 5$ y $Q(x) = 3x^3 + 4x^2 - 1$, calcula (a) $P(x) - Q(x)$ y (b) el valor numérico $P(2)$.

Solución

(a) Al restar hay que cambiar el signo de *todos* los términos de Q , no solo del primero: $-Q(x) = -3x^3 - 4x^2 + 1$.

Ahora se juntan los términos semejantes, los que tienen la misma parte con letra. Los de grado 3: $3x^3 - 3x^3 = 0$. Los de grado 2: $0 - 4x^2 = -4x^2$. Los de grado 1: $-2x$. Y los números: $5 + 1 = 6$.

$P(x) - Q(x) = -4x^2 - 2x + 6$, que es de grado 2 aunque los dos de partida fueran de grado 3: los términos de grado 3 se han anulado entre sí, y el resultado está bien.

(b) El valor numérico se calcula sustituyendo la letra por el número: $P(2) = 3 \times 2^3 - 2 \times 2 + 5$.

$P(2) = 3 \times 8 - 4 + 5 = 24 - 4 + 5 = 25$.

Se corrige solo por otro camino, que además ata (a) con (b): $Q(2) = 24 + 16 - 1 = 39$, y la resta de (a) en $x = 2$ vale $-16 - 4 + 6 = -14$. En efecto $25 - 39 = -14$, así que los dos apartados encajan.

- 9 Desarrolla sin hacer la multiplicación entera: (a) $(2x + 5)^2$; (b) $(3x - 1)^2$; (c) $(x + 4)(x - 4)$.

Solución

(a) El cuadrado de una suma es el primero al cuadrado, más el doble del primero por el segundo, más el segundo al cuadrado: $4x^2 + 2 \times 2x \times 5 + 25 = 4x^2 + 20x + 25$.

(b) Con una resta cambia solo el signo del término del medio: $9x^2 - 2 \times 3x \times 1 + 1 = 9x^2 - 6x + 1$. El último término es positivo, porque es un cuadrado.

(c) Suma por diferencia da la diferencia de los cuadrados, y el término del medio desaparece: $x^2 - 16$.

Para buscarte los fallos, sustituye varios valores en las dos escrituras de cada apartado: si en alguno no coinciden, hay un error seguro. Con $x = 1$: en (a), $(2 + 5)^2 = 49$ y $4 + 20 + 25 = 49$; en (b), $(3 - 1)^2 = 4$ y $9 - 6 + 1 = 4$; en (c), $5 \times (-3) = -15$ y $1 - 16 = -15$.

Y con $x = 2$: en (a), $(4 + 5)^2 = 81$ y $16 + 40 + 25 = 81$; en (b), $(6 - 1)^2 = 25$ y $36 - 12 + 1 = 25$; en (c), $6 \times (-2) = -12$ y $4 - 16 = -12$. Que coincidan tampoco lo demuestra: $5x^2 + 17x + 27$, que está mal, da 49 con $x = 1$ y 81 con $x = 2$, igual que (a). Lo que demuestra el desarrollo es hacerlo término a término; probar valores sirve para pillar un error, no para dar el desarrollo por bueno.

▲ Elevar al cuadrado una suma *no* es lo mismo que elevar cada sumando y sumar después: con 2 y 5, $(2 + 5)^2$ vale 49 mientras que $2^2 + 5^2$ vale 29. Lo que falta entre esos dos números, 20, es justo el término del medio.

10

Multiplica $(x^2 - 3x + 2)(x + 4)$ y comprueba el resultado.

Solución

Cada término del primero multiplica a cada término del segundo.

$x^2 \times x = x^3$ y $x^2 \times 4 = 4x^2$. Después $-3x \times x = -3x^2$ y $-3x \times 4 = -12x$. Y por último $2 \times x = 2x$ y $2 \times 4 = 8$.

Se juntan los semejantes: $4x^2 - 3x^2 = x^2$ y $-12x + 2x = -10x$. Queda $x^3 + x^2 - 10x + 8$.

El grado cuadra: grado 2 por grado 1 tiene que dar grado 3.

▲ Probar valores descarta, pero no demuestra, y no basta con probar unos cuantos: $2x^3 - 5x^2 + x + 2$, que no es el resultado, coincide con el bueno en $x = 1$, en $x = 2$ y en $x = 3$, y solo se separa en $x = 4$ (54 frente a 48). La prueba de verdad es rehacer el producto y comparar coeficiente a coeficiente; probar con $x = 2$, que da $(4 - 6 + 2) \times 6 = 0$ y $8 + 4 - 20 + 8 = 0$, sirve para cazar una errata, no para darlo por bueno.

11

Un cuadrado mide $x + 3$ centímetros de lado. (a) Escribe su área como polinomio desarrollado. (b) Calcula el área si $x = 7$, por los dos caminos. (c) Escribe cuánta área tiene de más que un cuadrado de lado x .

Solución

(a) El área de un cuadrado es el lado al cuadrado: $(x + 3)^2 = x^2 + 6x + 9$ centímetros cuadrados.

(b) Por el lado: si $x = 7$, el lado mide 10 cm y el área es $10 \times 10 = 100 \text{ cm}^2$.

Por el polinomio: $7^2 + 6 \times 7 + 9 = 49 + 42 + 9 = 100 \text{ cm}^2$. Coinciden, lo que descarta una errata; que el desarrollo sea el bueno lo dice la identidad del cuadrado de una suma, no este número: $x^2 + 7x + 2$ también da 100 cuando x vale 7.

(c) La diferencia entre las dos áreas es $(x^2 + 6x + 9) - x^2 = 6x + 9$ centímetros cuadrados.

Con $x = 7$ esa diferencia vale $6 \times 7 + 9 = 51 \text{ cm}^2$, y en efecto $100 - 49 = 51 \text{ cm}^2$.

Factorización, Ruffini y teorema del resto

Lo que hay que saber

Factor común primero. Antes de probar nada más, mirar si todos los términos comparten un número o una letra: $5x^3 - 20x = 5x(x^2 - 4)$.

Las identidades, leídas al revés. Una resta de cuadrados, $m^2 - n^2$, se parte en $(m - n)(m + n)$; y $m^2 \pm 2mn + n^2$ es el cuadrado de $(m \pm n)$. Antes de darlo por bueno conviene repasar ese término central.

Regla de Ruffini. Solo vale cuando el divisor tiene la forma $x - a$. Se colocan los coeficientes de mayor a menor grado, poniendo un 0 en cada grado que no aparezca; el último número de la fila de abajo es el resto.

Teorema del resto. El resto que deja un polinomio al dividirlo entre $x - a$ se obtiene sustituyendo su letra por a . Cuando ese resultado es cero, el divisor cabe un número exacto de veces. Con $x + 2$ lo que se sustituye es -2 , no 2.

Buscar raíces enteras. Si los coeficientes son enteros, las raíces enteras están entre los divisores del término independiente, con los dos signos. Es una pista que acorta la búsqueda, y deja de servir si ese término es 0: entonces hay que sacar factor común x antes de nada.

12

Divide por la regla de Ruffini $2x^3 + x^2 - 8x + 5$ entre $x - 1$, y di el cociente y el resto.

Solución

Se escriben los coeficientes en orden, 2, 1, -8 y 5, y se usa el 1, que es el número que anula $x - 1$.

Se baja el 2. Luego $2 \times 1 = 2$ y $1 + 2 = 3$. Luego $3 \times 1 = 3$ y $-8 + 3 = -5$. Y por último $-5 \times 1 = -5$ y $5 + (-5) = 0$.

El último número es el resto, así que el **resto es 0** y el **cociente es $2x^2 + 3x - 5$** .

El resto se corrige solo con el teorema del resto, sin rehacer la división: tiene que valer $P(1) = 2 + 1 - 8 + 5 = 0$. Cuadra. Pero eso no dice nada del cociente, que se comprueba aparte multiplicando: $(x - 1)(2x^2 + 3x - 5) = 2x^3 + 3x^2 - 5x - 2x^2 - 3x + 5 = 2x^3 + x^2 - 8x + 5$, el polinomio de partida.

▲ Que el resto sea 0 no significa que el polinomio esté factorizado: solo se ha sacado un factor. El cociente $2x^2 + 3x - 5$ todavía se parte en $(x - 1)(2x + 5)$, así que el polinomio entero es $(x - 1)(x - 1)(2x + 5)$ y el 1 es raíz dos veces.

13

Sin hacer la división, calcula qué resto deja $P(x) = x^4 - 3x^2 + 2x - 6$ al dividirlo entre $x + 2$, y di si $x + 2$ es un factor de $P(x)$.

Solución

Para saber el resto no hace falta dividir: basta con sustituir la letra por el número que anula al divisor. Aquí el divisor es $x + 2$, que se lee $x - (-2)$, así que ese número es **-2**.

$$P(-2) = (-2)^4 - 3 \times (-2)^2 + 2 \times (-2) - 6.$$

Cada trozo: $(-2)^4 = 16$, después $3 \times 4 = 12$ que va restando, después $2 \times (-2) = -4$, y el **-6**.

$16 - 12 - 4 - 6 = -6$. El resto es **-6**.

$x + 2$ no es factor de $P(x)$, porque para serlo el resto tendría que valer 0. Y hay que cuidar el signo del número que se sustituye: con $x + 2$ lo que se sustituye es **-2**, no 2.

Se corrige solo haciendo la división de verdad, por Ruffini con el **-2**, que es un camino distinto: los coeficientes son 1, 0, -3, 2 y -6. Se baja el 1; $1 \times (-2) = -2$ y $0 - 2 = -2$; $-2 \times (-2) = 4$ y $-3 + 4 = 1$; $1 \times (-2) = -2$ y $2 - 2 = 0$; $0 \times (-2) = 0$ y $-6 + 0 = -6$. El resto vuelve a ser **-6**.

14

Factoriza: (a) $5x^3 - 20x$; (b) $x^2 - 14x + 49$; (c) $3x^2 - 27$.

Solución

(a) Primero el factor común, que es el paso que conviene no saltarse: $5x^3 - 20x = 5x(x^2 - 4)$. Y $x^2 - 4$ es una diferencia de cuadrados: **$5x(x - 2)(x + 2)$** .

(b) Tiene forma de cuadrado de una resta. El término del medio tendría que ser $2 \times x \times 7 = 14x$, y es justo lo que hay: **$(x - 7)^2$** .

(c) También hay factor común: $3x^2 - 27 = 3(x^2 - 9)$, y $x^2 - 9$ vuelve a ser diferencia de cuadrados: **$3(x - 3)(x + 3)$** .

Para buscarte los fallos, sustituye varios valores en las dos escrituras: si en alguno no coinciden hay un error seguro, y si coinciden solo queda descartada la errata. Con $x = 1$: en (a), $5 - 20 = -15$ y $5 \times 1 \times (-1) \times 3 = -15$; en (b), $1 - 14 + 49 = 36$ y $(-6)^2 = 36$; en (c), $3 - 27 = -24$ y $3 \times (-2) \times 4 = -24$.

Con $x = 4$: en (a), $320 - 80 = 240$ y $5 \times 4 \times 2 \times 6 = 240$; en (b), $16 - 56 + 49 = 9$ y $(4 - 7)^2 = 9$; en (c), $48 - 27 = 21$ y $3 \times 1 \times 7 = 21$. Conviene evitar los valores que anulan algún factor, porque ahí los dos lados dan 0 y no se comprueba gran cosa. Lo que sí demuestra la factorización es multiplicar los factores y ver si vuelve a salir el polinomio de partida.

15

Factoriza por completo $P(x) = x^3 - 7x + 6$. Busca antes sus raíces enteras entre los divisores de 6.

Solución

Los divisores de 6 son 1, 2, 3 y 6, con los dos signos. Se prueban con el teorema del resto hasta dar con uno que anule el polinomio.

$P(1) = 1 - 7 + 6 = 0$, así que 1 es raíz y $x - 1$ es factor.

En la fila de Ruffini hay que poner un 0 en el lugar del grado 2, que aquí no aparece: los coeficientes son 1, 0, -7 y 6. Usando el 1: se baja el 1; $1 \times 1 = 1$ y $0 + 1 = 1$; $1 \times 1 = 1$ y $-7 + 1 = -6$; $-6 \times 1 = -6$ y $6 - 6 = 0$. El cociente es $x^2 + x - 6$.

Ese cociente es de segundo grado y se parte buscando dos números que multiplicados den -6 y sumados den 1: son 3 y -2. Queda $x^2 + x - 6 = (x + 3)(x - 2)$.

$P(x) = (x - 1)(x + 3)(x - 2)$. Dar un valor a las dos escrituras sirve para descartar: con $x = 4$, por un lado $64 - 28 + 6 = 42$ y por otro $3 \times 7 \times 2 = 42$. Y lo que lo demuestra es multiplicar: $(x + 3)(x - 2) = x^2 + x - 6$, y después $(x - 1)(x^2 + x - 6) = x^3 + x^2 - 6x - x^2 - x + 6 = x^3 - 7x + 6$.

Ecuaciones de segundo grado

Lo que hay que saber

Sin término independiente (por ejemplo $3x^2 - 12x = 0$): se saca factor común x . Salen dos soluciones y una de ellas es 0, salvo que falte también el término con x sola, como en $3x^2 = 0$, donde la única solución es 0. ▲ Dividir los dos lados entre x hace desaparecer esa solución.

Sin término en x (por ejemplo $2x^2 - 50 = 0$): se despeja x^2 y se toman los dos números cuyo cuadrado da ese valor, uno positivo y otro negativo; si x^2 queda 0, esos dos números son el mismo y la única solución es 0, y si queda negativo, no hay solución con los números de este curso.

La fórmula general, cuando la ecuación queda ordenada como $ax^2 + bx + c = 0$ y a no vale 0, es $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$. Se lee así: arriba va b cambiado de signo, y a ese número se le suma y se le resta la raíz de $b^2 - 4ac$; cada uno de los dos resultados se parte entre $2a$. El orden importa: la raíz se suma o se resta a $-b$, no al revés. Antes de sustituir hay que anotar a , b y c *con su signo*, sin saltarse ninguno.

Toda solución se comprueba sustituyéndola en la ecuación de partida. Que salga un número entero o redondo no prueba nada.

En un problema hay dos pasos, no uno: resolver la ecuación y después mirar cuáles de las soluciones sirven. Una longitud, una edad o un número de personas no pueden salir negativos, y descartar una solución por eso no significa que la ecuación estuviera mal.

16

Resuelve: (a) $3x^2 - 12x = 0$; (b) $2x^2 - 50 = 0$.

Solución

(a) No hay término suelto sin letra, así que se saca factor común: $3x(x - 4) = 0$.

Un producto vale 0 cuando uno de los dos factores vale 0: o bien $3x = 0$, o bien $x - 4 = 0$. Las soluciones son $x = 0$ y $x = 4$.

(b) Aquí falta el término con x sola. Se despeja: $2x^2 = 50$, o sea $x^2 = 25$.

Hay dos números cuyo cuadrado es 25: $x = 5$ y $x = -5$. Las dos se comprueban en la ecuación de partida: $2 \times 25 - 50 = 0$ en los dos casos.

▲ En (a) no se puede dividir entre $3x$ los dos lados. Quedaría $x - 4 = 0$ y solo saldría $x = 4$: dividir entre algo que puede valer 0 hace desaparecer precisamente la solución $x = 0$.

17

Resuelve $x^2 - 7x + 10 = 0$ y comprueba las dos soluciones.

Solución

Se identifican los tres números con su signo: $a = 1$, $b = -7$ y $c = 10$.

Dentro de la raíz de la fórmula va $b^2 - 4ac = (-7)^2 - 4 \times 1 \times 10 = 49 - 40 = 9$, y $\sqrt{9} = 3$.

$x = (7 \pm 3) \div 2$. Por un lado $(7 + 3) \div 2 = 5$ y por otro $(7 - 3) \div 2 = 2$.

La comprobación, que es la parte que decide: con $x = 5$, $25 - 35 + 10 = 0$. Con $x = 2$, $4 - 14 + 10 = 0$. Las dos cumplen.

▲ Que las soluciones salgan enteras no significa que estén bien. Si te hubieras dejado el signo de b y hubieras escrito $b = 7$, saldrían -5 y -2 , enteras también, y ninguna cumple la ecuación: $25 + 35 + 10 = 70$. Lo único que lo decide es sustituir.

18

Resuelve $2x^2 + 5x - 3 = 0$.

Solución

$a = 2$, $b = 5$ y $c = -3$. Dentro de la raíz: $5^2 - 4 \times 2 \times (-3) = 25 + 24 = 49$. Ojo al signo, porque $-4 \times 2 \times (-3)$ suma.

$\sqrt{49} = 7$, y abajo va $2a = 4$. Entonces $x = (-5 \pm 7) \div 4$.

Por un lado $(-5 + 7) \div 4 = 2/4 = 1/2$. Por otro $(-5 - 7) \div 4 = -12/4 = -3$.

Comprobación con $x = 1/2$: $2 \times 1/4 + 5 \times 1/2 - 3 = 1/2 + 5/2 - 3 = 3 - 3 = 0$.

Comprobación con $x = -3$: $2 \times 9 + 5 \times (-3) - 3 = 18 - 15 - 3 = 0$. Las dos cumplen.

19

Un rectángulo tiene el largo **3 cm** mayor que el ancho y su área es de **54 cm²**. (a) Calcula sus dos dimensiones. (b) Calcula su perímetro.

Solución

(a) Se llama x al ancho en centímetros; entonces el largo mide $x + 3$ centímetros y el área es $x(x + 3) = 54$.

Se ordena: $x^2 + 3x - 54 = 0$. Dentro de la raíz: $3^2 - 4 \times 1 \times (-54) = 9 + 216 = 225$, y $\sqrt{225} = 15$.

$x = (-3 \pm 15) \div 2$, o sea $x = 6$ y $x = -9$. El **ancho mide 6 cm** y el **largo, 9 cm**; se comprueba en el enunciado: $6 \times 9 = 54 \text{ cm}^2$.

(b) El perímetro es $2 \times (6 + 9) = 30 \text{ cm}$.

▲ Que salga $x = -9$ no significa que el planteamiento esté mal: esa solución cumple la ecuación ($81 - 27 - 54 = 0$) y lo que no puede es ser un ancho, porque una longitud no es negativa. Resolver la ecuación y resolver el problema son dos cosas distintas, y hay que hacer las dos.

Sistemas de ecuaciones: igualación y casos raros

Lo que hay que saber

Método de igualación: en cada una de las dos ecuaciones se deja sola la misma letra, y luego se escribe que los dos resultados obtenidos valen lo mismo. Queda una ecuación con una sola letra.

La solución es una pareja de números, no un número suelto. Una vez hallada una incógnita, la otra sale sustituyendo en la ecuación más sencilla de las dos.

Cuando desaparecen las dos incógnitas hay que mirar qué ha quedado: una igualdad falsa ($0 = 18$) significa que el sistema no tiene ninguna solución, y una igualdad cierta ($0 = 0$), que tiene infinitas.

Para plantear un problema, escribir primero qué representa cada letra, con sus unidades. Después, una ecuación por cada dato del enunciado que relacione las dos cantidades.

Al terminar, mirar si el resultado cabe en el enunciado: un número de vehículos o de entradas tiene que salir entero y no negativo, y si no, hay que revisar el planteamiento. El 0 vale, salvo que el enunciado obligue a que haya de los dos tipos.

20 Resuelve por el método de igualación: $x + y = 11$ y $3x - y = 9$.

Solución

Igualar consiste en despejar la misma incógnita en las dos ecuaciones y escribir que las dos expresiones valen lo mismo.

De la primera: $x = 11 - y$. De la segunda: $3x = 9 + y$, o sea $x = (9 + y) \div 3$.

Se igualan: $11 - y = (9 + y) \div 3$. Se quita el denominador multiplicando todo por 3: $33 - 3y = 9 + y$.

Se juntan las y a un lado: $33 - 9 = y + 3y$, o sea $24 = 4y$, de donde $y = 6$. entonces $x = 11 - 6 = 5$.

La solución es la pareja $x = 5$ e $y = 6$, y hay que probarla en las dos ecuaciones: $5 + 6 = 11$ y $3 \times 5 - 6 = 15 - 6 = 9$. Las dos cuadran.

21 Estudia cuántas soluciones tiene cada sistema. (a) $2x - 3y = 4$ junto con $-4x + 6y = 10$. (b) $2x - 3y = 4$ junto con $-4x + 6y = -8$.

Solución

(a) Se multiplica la primera ecuación por 2 para que los términos con x se puedan anular: $4x - 6y = 8$.

Al sumarla con la segunda desaparecen las dos incógnitas y queda $0 = 18$, que es falso. **El sistema (a) no tiene solución:** no hay ninguna pareja que cumpla las dos.

(b) Se hace lo mismo: la primera por 2 da $4x - 6y = 8$, y sumándola con la segunda queda $0 = 0$, que se cumple con cualquier pareja de números.

El sistema (b) tiene infinitas soluciones: la segunda ecuación es la primera multiplicada por -2 , así que no aporta nada nuevo. Vale cualquier pareja que cumpla $2x - 3y = 4$, por ejemplo $x = 2$ e $y = 0$, o $x = 5$ e $y = 2$.

▲ Que desaparezcan las dos incógnitas no basta para decir que no hay solución: hay que mirar qué queda. Una igualdad falsa significa que no hay ninguna, y una igualdad cierta, que hay infinitas.

22 En una sesión de cine se han vendido **120 entradas** y se han recaudado **852 €**. La entrada de adulto vale **8 €** y la de menor de edad, **5 €**. ¿Cuántas entradas se han vendido de cada tipo?

Solución

Antes de plantear nada se escribe qué representa cada letra, con su unidad: a son las entradas de adulto y n , las de menor de edad.

El recuento de entradas da $a + n = 120$. El dinero da $8a + 5n = 852$, porque cada entrada de adulto aporta 8 € y cada una de menor, 5 €.

Para que las n se vayan, se multiplica la primera por 5: $5a + 5n = 600$. Restándola de la segunda queda $8a - 5a = 852 - 600$, o sea $3a = 252$.

$a = 84$ entradas de adulto y, volviendo al recuento, **$n = 120 - 84 = 36$ de menor de edad**.

Se repasan las dos condiciones del enunciado: $84 + 36 = 120$ entradas, y $84 \times 8 + 36 \times 5 = 672 + 180 = 852$ €. Los dos resultados salen enteros, que es lo que tiene que ocurrir cuando se cuentan entradas.

El teorema de Pitágoras en el espacio

Lo que hay que saber

En un triángulo rectángulo, la hipotenusa elevada al cuadrado vale lo mismo que los dos catetos elevados al cuadrado y sumados. La hipotenusa es el lado que queda enfrente del ángulo recto, y mide más que cualquiera de los otros dos.

Para hallar un cateto hay que restar, y no sumar: su cuadrado vale el de la hipotenusa menos el del cateto que se conoce. Si esa resta da un número negativo, con esas medidas no se puede formar un triángulo rectángulo.

La diagonal de un ortoedro sale aplicando el teorema dos veces: primero la diagonal de la base con el largo y el ancho, y después esa diagonal con la altura. Al final, su cuadrado coincide con $\text{largo}^2 + \text{ancho}^2 + \text{alto}^2$.

Dónde hay un triángulo rectángulo sin que lo diga el enunciado: al trazar la altura de un triángulo con dos lados iguales, al partir un rectángulo por su diagonal, y entre la altura de una pirámide regular y el apotema de su base. Esos dos se cortan en ángulo recto, justo en el centro de la base.

Control del resultado: la hipotenusa tiene que salir mayor que cada cateto, y un cateto, menor que la hipotenusa. Un resultado que no cumple eso está mal, aunque la cuenta parezca bien hecha.

23

Una caja tiene forma de ortoedro y mide **12 cm** de largo, **9 cm** de ancho y **8 cm** de alto. (a) Calcula la diagonal de su base. (b) Calcula la diagonal de la caja, la que va de un vértice al opuesto.

Solución

(a) La base es un rectángulo de 12 cm por 9 cm, y su diagonal lo parte en dos triángulos rectángulos cuyos catetos son esos dos lados.

Diagonal de la base al cuadrado = $12^2 + 9^2 = 144 + 81 = 225$, así que la **diagonal de la base mide 15 cm**.

(b) Esa diagonal y la altura de la caja forman a su vez un triángulo rectángulo, y su hipotenusa es la diagonal que se pide.

Diagonal al cuadrado = $15^2 + 8^2 = 225 + 64 = 289$, y la **diagonal de la caja mide 17 cm**.

Se corrige solo juntando los dos pasos en uno: $12^2 + 9^2 + 8^2 = 144 + 81 + 64 = 289$, el mismo 289. Y el resultado, 17 cm, es mayor que cualquiera de las tres aristas, como tiene que ser la hipotenusa.

24

Una antena vertical de **24 m** de alto se sujeta con un cable tirante que va desde su punta hasta una estaca clavada en un suelo horizontal, a **7 m** de la base. (a) ¿Cuánto mide el cable? (b) Si hay que comprar **1,5 m** de más para atarlo por los dos extremos, ¿cuánto cable se compra?

Solución

(a) La antena, el suelo y el cable forman un triángulo rectángulo: el ángulo recto está en la base de la antena, y el cable es la hipotenusa.

Cable al cuadrado = $24^2 + 7^2 = 576 + 49 = 625$, así que el **cable mide 25 m**.

(b) Se compran $25 + 1,5 = 26,5$ m.

Se corrige solo dando la vuelta a la cuenta: si el cable mide 25 m y la antena 24 m, la distancia al suelo tendría que salir de $25^2 - 24^2 = 625 - 576 = 49$, y $\sqrt{49} = 7$ m, que es el dato del enunciado.

▲ Comprobar que los dos catetos reconstruyen la hipotenusa no detecta haberlos intercambiado, porque $24^2 + 7^2$ y $7^2 + 24^2$ son la misma suma; aquí ese intercambio tampoco cambia el resultado, porque el cable sale el mismo. Lo que sí lo cambia es equivocarse de papel: tomando el cable por un cateto y la antena por la hipotenusa saldría $24^2 - 7^2 = 527$. Ese lado mediría entre 22 y 23 m, menos que la propia antena, y eso es imposible con el cable tirante.

25

Un triángulo isósceles tiene los dos lados iguales de **13 cm** y la base de **10 cm**. (a) Calcula su altura sobre la base. (b) Calcula su área.

Solución

(a) La altura sobre la base de un triángulo isósceles cae en el punto medio de esa base y la parte en dos trozos iguales de 5 cm.

Se forma así un triángulo rectángulo cuya hipotenusa es el lado de 13 cm y uno de cuyos catetos mide 5 cm. El otro cateto es la altura.

Altura al cuadrado = $13^2 - 5^2 = 169 - 25 = 144$, así que la **altura mide 12 cm**.

(b) Área = base por altura dividido entre dos = $10 \times 12 \div 2 = \mathbf{60 \text{ cm}^2}$.

Se corrige solo volviendo a Pitágoras hacia delante: $5^2 + 12^2 = 25 + 144 = 169 = 13^2$. Y la altura, 12 cm, sale menor que el lado de 13 cm, que es lo que debe pasar cuando se calcula un cateto.

Semejanza y teorema de Tales

Lo que hay que saber

Dos figuras son semejantes si sus ángulos coinciden uno a uno y sus lados correspondientes guardan todos la misma **razón de semejanza** k . Los lados se emparejan por la posición que ocupan, no por el orden en que vienen escritos.

En triángulos hay atajos: basta con que tengan dos ángulos iguales (el tercero sale solo, porque los tres suman 180°), o con que los tres lados sean proporcionales.

Teorema de Tales: cuando varias rectas paralelas cortan a otras dos, los trozos que quedan marcados sobre una de ellas guardan la misma proporción que los trozos marcados sobre la otra.

Escala 1:n significa que cada unidad del plano son n unidades de la realidad. El cambio de escala y el cambio de unidad son dos operaciones distintas y hay que hacer las dos.

Control del resultado: al terminar, dividir cada lado del grande entre el lado que le corresponde del pequeño. Si las divisiones no dan todas el mismo número, algún lado está emparejado con el que no era.

26

Un triángulo tiene los lados de **6 cm**, **8 cm** y **10 cm**. Otro triángulo semejante a él tiene su lado menor de **15 cm**. (a) Calcula la razón de semejanza. (b) Calcula los otros dos lados.

Solución

(a) La razón de semejanza se saca de dos lados que se correspondan, y el que corresponde al menor es el menor: $k = 15 \div 6 = \mathbf{5/2}$, es decir 2,5.

(b) Los demás lados se multiplican por esa misma razón: $8 \times 5/2 = \mathbf{20 \text{ cm}}$ y $10 \times 5/2 = \mathbf{25 \text{ cm}}$.

Se corrige solo comprobando que las tres divisiones dan lo mismo: $15 \div 6 = 2,5$, $20 \div 8 = 2,5$ y $25 \div 10 = 2,5$.

Y hay una segunda comprobación que además es bonita: el de partida cumple $6^2 + 8^2 = 36 + 64 = 100 = 10^2$, así que es rectángulo; el semejante tiene que serlo también, y en efecto $15^2 + 20^2 = 225 + 400 = 625 = 25^2$.

▲ Hay que emparejar cada lado con el que le corresponde, no por el orden en que están escritos. Si

se toma el 15 como el que corresponde al lado de 8, sale $k = 15 \div 8 = 1,875$ y los otros dos lados darían 11,25 cm y 18,75 cm: el menor del triángulo nuevo sería 11,25 y no 15, justo lo contrario de lo que dice el enunciado.

27

Tres rectas paralelas cortan a otras dos rectas. Recorriendo esas dos en el mismo sentido, en la primera quedan marcados dos segmentos seguidos de **4 cm** y **6 cm**, y en la segunda el primero de los dos segmentos mide **10 cm**. ¿Cuánto mide el segundo?

Solución

El teorema de Tales dice que esos segmentos son proporcionales: el primero es al segundo en una recta como el primero es al segundo en la otra.

Se escribe la proporción cuidando el orden: $4 \div 6 = 10 \div x$, donde x es lo que se busca.

Multiplicando en cruz: $4x = 60$, así que **$x = 15$ cm**.

Se corrige solo comparando las dos rectas entre sí en vez de dentro de cada una: $10 \div 4 = 2,5$ y $15 \div 6 = 2,5$. Las dos formas de escribir la proporción tienen que llevar al mismo sitio.

▲ Si se cruzan los términos y se escribe $4 \div 6 = x \div 10$, sale $x = 40/6$, unos 6,67 cm, que además es menor que el segmento de 10 cm cuando debería ser mayor: el segundo trozo es más largo que el primero en la recta de arriba, y también tiene que serlo en la de abajo.

28

Un poste vertical de **2 m** de alto proyecta sobre suelo horizontal una sombra de **1,5 m**. A la misma hora, y sobre ese mismo suelo, un edificio también vertical proyecta una sombra de **18 m**. ¿Cuánto mide el edificio?

Solución

A la misma hora los rayos del sol llegan con la misma inclinación, así que el poste con su sombra y el edificio con la suya forman dos triángulos rectángulos semejantes.

Se emparejan altura con altura y sombra con sombra: $2 \div 1,5 = h \div 18$.

Multiplicando en cruz: $1,5 \times h = 36$, o sea **$h = 24$ m**.

Se corrige solo comprobando que la razón entre altura y sombra es la misma en los dos: $2 \div 1,5 = 4/3$ y $24 \div 18 = 4/3$.

▲ La condición de «a la misma hora» no es un adorno del enunciado: si las dos sombras se midieran en momentos distintos, los triángulos no tendrían los mismos ángulos y la proporción no valdría.

29

En un plano dibujado a escala **1:250**, una habitación es un rectángulo de **4 cm** por **3 cm**. (a) Calcula sus medidas reales en metros. (b) Calcula su perímetro real.

Solución

La escala 1:250 significa que cada centímetro del plano son 250 centímetros de la realidad.

(a) El lado de 4 cm son $4 \times 250 = 1.000$ cm, que son **10 m**. El de 3 cm son $3 \times 250 = 750$ cm, que son **7,5 m**.

(b) El perímetro real es $2 \times (10 + 7,5) = \mathbf{35\ m}$.

Se corrige solo por el otro camino: el perímetro en el plano es $2 \times (4 + 3) = 14$ cm, y $14 \times 250 = 3.500$ cm, que son 35 m. Las longitudes se multiplican todas por la misma escala, así que da igual multiplicar antes o después de sumar.

▲ El paso de centímetros a metros se hace dividiendo entre 100, no entre 250: son dos cosas distintas que caen seguidas. La escala convierte plano en realidad y la división entre 100 convierte centímetros en metros.

Cuerpos geométricos: volúmenes compuestos y capacidad

Lo que hay que saber

Prisma y cilindro: se multiplica el área de la base por la altura. **Pirámide y cono:** ese mismo producto, dividido entre 3. **Esfera:** $\frac{4}{3} \times \pi \times \text{radio}^3$.

En un cuerpo compuesto se suman los volúmenes de las piezas que se añaden y se restan los de los huecos. Antes de sumar, todas las medidas tienen que estar en la misma unidad.

Capacidad: 1 cm³ es 1 mililitro, 1 dm³ es 1 litro, y un metro cúbico equivale a 1.000 litros. Pasar de volumen a capacidad es cambiar de nombre, no calcular nada nuevo.

Cuando un cuerpo se hunde del todo en un líquido y el recipiente tiene la misma anchura a cualquier altura, el líquido sube el volumen del cuerpo repartido por el área de la base del recipiente: subida = volumen ÷ área de la base. Con un recipiente que se estreche, o si el líquido se derrama, esa cuenta ya no vale.

Dejar π sin multiplicar hasta el final ahorra errores y a veces el π se va solo al dividir dos volúmenes o un volumen entre un área. Si hay que dar un número, se dice qué valor de π se ha usado.

- 30** Un depósito tiene forma de cilindro de **80 cm** de radio y **2 m** de altura. (a) Calcula su volumen en metros cúbicos, dejándolo en función de π y también con $\pi \approx 3,14$. (b) Di cuántos litros caben.

Solución

Lo primero es poner las dos medidas en la misma unidad, porque vienen en centímetros y en metros: 80 cm = 0,8 m.

(a) El volumen de un cilindro es el área de la base por la altura: $\pi \times 0,8^2 \times 2 = \pi \times 0,64 \times 2 = \mathbf{1,28\pi \text{ m}^3}$.

Con $\pi \approx 3,14$ queda $1,28 \times 3,14 = \mathbf{4,0192 \text{ m}^3}$.

(b) Un metro cúbico son 1.000 litros, así que caben $4,0192 \times 1.000 = \mathbf{4.019,2 \text{ litros}}$.

▲ Para corregirte, rehaz la cuenta entera en centímetros y compara: $\pi \times 80^2 \times 200 = 1.280.000\pi \text{ cm}^3$, que con $\pi \approx 3,14$ son $4.019.200 \text{ cm}^3$; como un litro son 1.000 cm^3 , vuelven a salir 4.019,2 litros. Hace falta hacer eso, o mirar antes de empezar que las dos medidas estén en la misma unidad, porque el error no se delata solo: quien multiplique 80^2 por 2 obtiene 40.192 donde van 4,0192, y ese número por sí mismo no tiene nada de raro.

- 31** Un cuerpo está formado por un cubo de **6 cm** de arista y, pegada encima, una pirámide que tiene por base la cara superior del cubo y **4 cm** de altura. Calcula el volumen total.

Solución

El volumen del cubo es la arista al cubo: $6 \times 6 \times 6 = \mathbf{216 \text{ cm}^3}$.

La base de la pirámide es la cara del cubo, un cuadrado de 6 cm de lado, y su área vale 36 cm^2 .

El volumen de la pirámide es el área de la base por la altura dividido entre 3: $36 \times 4 \div 3 = \mathbf{48 \text{ cm}^3}$.

Como las dos piezas están pegadas una encima de la otra y no se solapan, los volúmenes se suman: $216 + 48 = \mathbf{264 \text{ cm}^3}$.

▲ El «÷ 3» de la pirámide cambia mucho el resultado, y hay una cota que decide sin discutir: la pirámide tiene la misma base que el cubo y es más baja, así que su volumen no puede pasar de un tercio del cubo, o sea de $216 \div 3 = 72 \text{ cm}^3$. Los 48 cm^3 caben ahí; los 144 cm^3 que salen al olvidar el «÷ 3», no.

32

Un vaso cilíndrico de **4 cm** de radio y **15 cm** de alto contiene agua hasta una altura de **9 cm**. Se meten dentro **6 bolas de acero** de **2 cm** de radio cada una, que quedan totalmente cubiertas. (a) ¿Cuánto sube el nivel del agua? (b) ¿Se derrama?

Solución

(a) Cada bola ocupa $\frac{4}{3} \times \pi \times 2^3 = 32\pi/3 \text{ cm}^3$. Las seis ocupan $6 \times 32\pi/3 = 64\pi \text{ cm}^3$.

Ese volumen es el que empuja el agua hacia arriba, pero la subida no es 64π : el agua se reparte por toda la base del vaso, cuya área vale $\pi \times 4^2 = 16\pi \text{ cm}^2$.

La subida es el volumen dividido entre el área de la base: $64\pi \div 16\pi = 4 \text{ cm}$. El π se va solo, así que el resultado es exacto y no hace falta aproximarlos.

(b) El nivel pasa de 9 cm a $9 + 4 = 13 \text{ cm}$, y el vaso mide 15 cm: **no se derrama**, y sobran 2 cm.

Se corrige solo por el otro camino: si el agua sube 4 cm en un vaso de $16\pi \text{ cm}^2$ de base, el volumen metido tiene que ser $16\pi \times 4 = 64\pi \text{ cm}^3$, que es justo lo que ocupan las seis bolas.

Movimientos en el plano: traslaciones, giros y simetrías

Lo que hay que saber

Traslación según el vector (a, b): el punto (x, y) pasa a (x + a, y + b). Para hallar el vector entre dos puntos se restan las coordenadas del de llegada menos las del de partida, en ese orden.

Simetrías respecto de los ejes: respecto del eje horizontal, el de las x, el punto (x, y) pasa a (x, -y); respecto del eje vertical, el de las y, pasa a (-x, y). Cambia la coordenada que *no* da nombre al eje.

Giros alrededor del origen: 90° en el sentido contrario a las agujas del reloj lleva (x, y) a (-y, x); 180° lleva (x, y) a (-x, -y); 270° en ese mismo sentido lleva (x, y) a (y, -x).

Encadenar movimientos: dos giros seguidos alrededor del mismo punto y en el mismo sentido suman sus ángulos, y las dos simetrías respecto de los ejes, una detrás de otra, dan el mismo resultado que el giro de 180° .

Qué se conserva y qué no: las distancias y los ángulos no cambian con ninguno de los tres movimientos. Lo que sí cambia con una simetría es la orientación, y por eso, deslizando sin levantar, cada punto no vuelve al sitio del que le corresponde. El contorno puede coincidir —un cuadrado reflejado en uno de sus ejes ocupa el mismo hueco—, pero sus vértices han cambiado de puesto.

33

Un triángulo tiene los vértices **A(1, 2)**, **B(5, 2)** y **C(5, 5)**, y se traslada según el vector **(-3, 4)**. (a) Escribe los tres vértices que se obtienen. (b) Comprueba que los lados miden lo mismo que antes.

Solución

(a) Trasladar según el vector (-3, 4) es restar 3 a la primera coordenada y sumar 4 a la segunda, en los tres puntos por igual.

A' (-2, 6), porque $1 - 3 = -2$ y $2 + 4 = 6$. **B' (2, 6)**, porque $5 - 3 = 2$. Y **C' (2, 9)**, porque $5 + 4 = 9$.

(b) El lado AB es horizontal y mide $5 - 1 = 4$ unidades; A'B' mide $2 - (-2) = 4$. El lado BC es vertical y mide $5 - 2 = 3$; B'C' mide $9 - 6 = 3$.

El lado AC es el que se mide con Pitágoras: avanza 4 y sube 3, así que vale $\sqrt{(16 + 9)} = \sqrt{25} = 5$. Y A'C' avanza $2 - (-2) = 4$ y sube $9 - 6 = 3$, o sea también 5.

Los tres lados coinciden, que es lo que tiene que pasar: una traslación mueve el triángulo entero sin estirarlo ni encogerlo.

34

Del punto **P(-4, 3)** escribe: (a) su simétrico respecto del eje vertical; (b) su simétrico respecto del eje horizontal; (c) el punto al que va si se gira 180° alrededor del origen.

Solución

(a) La simetría respecto del eje vertical, el de las y , cambia el signo de la primera coordenada y deja la segunda: **(4, 3)**.

(b) La simetría respecto del eje horizontal, el de las x , cambia el signo de la segunda y deja la primera: **(-4, -3)**.

(c) El giro de 180° alrededor del origen cambia el signo de las dos coordenadas: **(4, -3)**.

Se corrige solo encadenando las dos simetrías: si al resultado de (a), que es (4, 3), se le aplica la simetría de (b), sale (4, -3), que es exactamente el resultado de (c). Hacer las dos simetrías seguidas equivale al giro de media vuelta, aunque eso confirma (c) y no distingue (a) de (b): si se hubieran cambiado las dos reglas entre sí, el encadenado daría exactamente lo mismo.

▲ Conviene mirar bien el nombre de cada eje: el vertical es el de las y , y reflejarse en él cambia la x . Se comprueba mirando qué coordenada ha cambiado de signo.

35

Gira el punto **Q(2, 5)** un ángulo de 90° alrededor del origen en el sentido contrario a las agujas del reloj. (a) Escribe el punto que se obtiene. (b) Gira ese resultado otros 90° en el mismo sentido y escribe el punto final. (c) Comprueba que se llega al mismo sitio que con un solo giro de 180° .

Solución

(a) Ese giro lleva el punto (x, y) al punto $(-y, x)$. Con **Q(2, 5)** sale **Q'(-5, 2)**.

(b) Se aplica la misma regla a **Q'(-5, 2)**: la primera coordenada del nuevo punto es -2 y la segunda es -5. Sale **Q''(-2, -5)**.

(c) El giro de 180° cambia el signo de las dos coordenadas de **Q(2, 5)** y da **(-2, -5)**, el mismo punto. Dos cuartos de vuelta seguidos en el mismo sentido son media vuelta.

Se corrige solo de dos maneras, porque una sola no basta. La distancia al origen no cambia con un giro: para **Q** es $\sqrt{4 + 25} = \sqrt{29}$, para **Q'** es $\sqrt{25 + 4} = \sqrt{29}$ y para **Q''** es $\sqrt{4 + 25} = \sqrt{29}$. Y el sentido se mira por el cuadrante: **Q** está a la derecha y arriba, y un cuarto de vuelta contrario a las agujas lo lleva a la izquierda y arriba, con la primera coordenada negativa. Girando al revés habría salido (5, -2), que está a la misma distancia.

36

Una traslación lleva el punto **A(3, -1)** al punto **A'(7, 2)**. (a) ¿Cuál es el vector de esa traslación? (b) ¿A qué punto lleva al punto **B(-5, 4)**? (c) ¿De qué punto venía el punto **C'(0, 0)**?

Solución

(a) El vector se obtiene restando las coordenadas del punto de partida a las del de llegada: $7 - 3 = 4$ y $2 - (-1) = 3$. El vector es **(4, 3)**.

(b) Se le aplica a **B(-5, 4)**: $-5 + 4 = -1$ y $4 + 3 = 7$. Sale **B'(-1, 7)**.

(c) Aquí se va hacia atrás, así que se resta el vector en vez de sumarlo: $0 - 4 = -4$ y $0 - 3 = -3$. El punto de partida era **C(-4, -3)**.

Se corrige solo deshaciendo el camino en (c): si a **C(-4, -3)** se le suma el vector (4, 3), sale (0, 0), que es donde tenía que llegar.

▲ El orden de la resta en (a) importa: si se hace al revés, $3 - 7 = -4$ y $-1 - 2 = -3$, sale el vector (-4, -3), que es el de la traslación que va de **A'** a **A**, justo la contraria.

Funciones: cortes con los ejes, crecimiento y funciones a trozos

Lo que hay que saber

Qué es $f(3)$. Es el resultado que la función asigna a $x = 3$, y se calcula sustituyendo. Se dice que 3 tiene por imagen ese resultado, y a cada x le corresponde uno solo.

Dónde corta a cada eje. Para el vertical se sustituye x por 0. Para el horizontal se plantea $f(x) = 0$ y se resuelve, y ahí pueden salir varios puntos, o ninguno.

En $f(x) = mx + n$, el número m dice cuánto cambia el resultado cada vez que x aumenta en una unidad: con m positivo sube y con m negativo baja, y lo hace en una cantidad fija.

Función a trozos: cada intervalo tiene su propia expresión. Antes de calcular nada hay que ver en qué intervalo cae el valor, y en el punto donde cambian hay que mirar qué da cada una para saber si hay un salto.

Comparar dos resultados no basta para decir si la función sube o baja entre ellos: puede haber bajado y vuelto a subir por el camino. Para saberlo hace falta conocer la función entre los dos valores, no solo en los extremos.

- 37** De la función $f(x) = -2x + 6$: (a) calcula $f(0)$ y $f(4)$; (b) calcula el punto donde corta al eje horizontal; (c) di si sube o si baja al avanzar x , y en cuánto.

Solución

(a) La imagen de 0 es $f(0) = -2 \times 0 + 6 = 6$, y la imagen de 4 es $f(4) = -8 + 6 = -2$.

(b) Cortar el eje horizontal significa que la segunda coordenada vale 0, así que se resuelve $-2x + 6 = 0$.

De ahí $2x = 6$ y $x = 3$. El punto de corte es **(3, 0)**, y se comprueba: $f(3) = -6 + 6 = 0$.

(c) **Baja:** cada vez que x avanza una unidad, el resultado pierde 2. Se ve en los dos valores de (a), porque de $x = 0$ a $x = 4$ hay cuatro unidades de avance y el resultado cae de 6 a -2, es decir 8 menos, que son 4×2 .

El corte con el eje vertical, por cierto, ya estaba calculado: es el punto (0, 6), porque cortar ese eje significa hacer $x = 0$.

- 38** De la función $g(x) = x^2 - 4x + 3$: (a) calcula $g(0)$, $g(2)$ y $g(4)$; (b) calcula los puntos donde corta al eje horizontal; (c) di en qué valor de x alcanza su resultado más pequeño y cuánto vale ahí.

Solución

(a) $g(0) = 3$. Después $g(2) = 4 - 8 + 3 = -1$. Y $g(4) = 16 - 16 + 3 = 3$.

(b) Se resuelve $x^2 - 4x + 3 = 0$. Dentro de la raíz: $16 - 12 = 4$, y $\sqrt{4} = 2$, así que $x = (4 \pm 2) \div 2$ y salen $x = 3$ y $x = 1$. Corta en **(1, 0)** y en **(3, 0)**.

(c) Se reescribe la expresión completando un cuadrado: $x^2 - 4x + 3 = (x - 2)^2 + 3 - 4 = (x - 2)^2 - 1$. Un cuadrado no puede ser negativo, así que lo más pequeño que puede valer $(x - 2)^2$ es 0, y eso ocurre cuando $x = 2$. Entonces el resultado más pequeño es **-1, alcanzado en $x = 2$** . Cuadra con $g(2) = -1$ de (a).

▲ Este apartado enseña de paso que comparar solo dos valores no dice si la función sube o baja entre ellos: $g(0)$ y $g(4)$ valen los dos 3, y en medio la función ha bajado hasta -1 y ha vuelto a subir.

39

Una función vale $f(x) = 2x + 1$ cuando $x < 3$ y $f(x) = 10 - x$ cuando $x \geq 3$. (a) Calcula $f(0)$, $f(2)$, $f(3)$ y $f(8)$. (b) Di si hay un salto en $x = 3$.

Solución

(a) Lo primero es mirar en qué trozo cae cada valor. El 0 y el 2 son menores que 3, así que les toca la primera expresión: $f(0) = 1$ y $f(2) = 4 + 1 = 5$.

El 3 y el 8 cumplen $x \geq 3$, así que les toca la segunda: $f(3) = 10 - 3 = 7$ y $f(8) = 10 - 8 = 2$.

(b) Para saber si hay salto se mira qué pasa al llegar a 3 por cada lado. Por la izquierda, la primera expresión se acerca a $2 \times 3 + 1 = 7$. Por la derecha, la segunda da $10 - 3 = 7$.

Los dos valores coinciden, así que **no hay salto en $x = 3$** : la función se puede recorrer entera sin levantar el lápiz.

▲ Cambiar de expresión no obliga a saltar. Si el segundo trozo fuera $f(x) = 12 - x$, por la derecha daría 9 y por la izquierda 7, y entonces sí habría un salto de 2 unidades justo en $x = 3$.

40

Un taxi cobra **3,50 €** al empezar y **1,20 € por kilómetro**. (a) Escribe la fórmula que relaciona el precio con los kilómetros. (b) Calcula el precio de un viaje de 7 km. (c) Si el viaje ha costado **17,90 €**, ¿cuántos kilómetros se han hecho?

Solución

(a) Se llama x al número de kilómetros. El precio es lo fijo más lo que depende del trayecto: $p(x) = 3,5 + 1,2x$, con el resultado en euros.

(b) $p(7) = 3,5 + 1,2 \times 7 = 3,5 + 8,4 = 11,90$ €.

(c) Ahora se conoce el resultado y se busca la x : $3,5 + 1,2x = 17,9$.

Se quita lo fijo: $1,2x = 17,9 - 3,5 = 14,4$. Y se divide: $x = 14,4 \div 1,2 = 12$ km.

Se corrige solo yendo hacia delante: $p(12) = 3,5 + 1,2 \times 12 = 3,5 + 14,4 = 17,90$ €. Y las unidades cuadran, porque euros por kilómetro multiplicado por kilómetros da euros.

Estadística: tablas de frecuencias y datos agrupados

Lo que hay que saber

Frecuencia absoluta de un valor es el número de veces que aparece. La suma de todas tiene que dar el número de datos, y esa es la primera comprobación del recuento.

Frecuencia acumulada de un valor es la suya más las de todos los valores anteriores. La última tiene que coincidir con el total, y sirve para contar cuántos datos hay hasta ese valor contándolo a él, es decir los menores o iguales que él.

Datos agrupados en intervalos: se trabaja con la **marca de clase**, que es el punto medio de cada intervalo, es decir la media de sus dos extremos.

Media a partir del recuento: cada valor (o cada marca de clase) se multiplica por su frecuencia; después se suman todos esos productos y el resultado se parte entre el número de datos.

Con datos agrupados la media es aproximada: se está suponiendo que todos los datos de un intervalo valen su marca de clase, y eso no tiene por qué ser cierto. Al darla, conviene decir que es una estimación.

41

En una clase se ha preguntado por el número de hermanos y estas son las respuestas: **0, 1, 2, 1, 0, 3, 1, 2, 1, 0, 4, 2, 1, 1, 2**. (a) Construye la tabla de frecuencias absolutas y acumuladas. (b) Calcula la media. (c) Di cuál es la moda y cuál la mediana.

Solución

(a) Se cuenta cuántas veces sale cada valor. El 0 sale 3 veces, el 1 sale 6, el 2 sale 4, el 3 sale 1 y el 4 sale 1. En total $3 + 6 + 4 + 1 + 1 = 15$ datos, que son los que hay.

La frecuencia acumulada de cada valor es la suya más las de los valores anteriores: para el 0 es 3, para el 1 es 9, para el 2 es 13, para el 3 es 14 y para el 4 es **15**, que tiene que ser el total.

(b) La media se calcula multiplicando cada valor por las veces que sale, sumando todo y dividiendo entre el número de datos: $(0 \times 3 + 1 \times 6 + 2 \times 4 + 3 \times 1 + 4 \times 1) \div 15$.

Arriba queda $0 + 6 + 8 + 3 + 4 = 21$, y $21 \div 15 = 1,4$ **hermanos** de media.

(c) La **moda es 1**, el valor que más se repite (6 veces). Y como hay 15 datos, la **mediana es el octavo** al ordenarlos: la acumulada pasa de 3 a 9 en el valor 1, así que del cuarto al noveno todos son 1 y el octavo también. La mediana vale 1.

42

Los minutos que tardan **20 personas** en llegar al trabajo se han agrupado así: de 0 a 10 minutos, **4 personas**; de 10 a 20, **7**; de 20 a 30, **6**; de 30 a 40, **3**. Cada grupo recoge su extremo de la izquierda y no el de la derecha, salvo el último, que recoge los dos: quien tarda 20 minutos justos cuenta en el de 20 a 30. (a) Escribe la marca de clase de cada intervalo. (b) Calcula la media. (c) Di cuántas personas tardan menos de 20 minutos.

Solución

(a) La marca de clase es el punto medio del intervalo, la media de sus dos extremos: **5, 15, 25 y 35 minutos**.

(b) Con datos agrupados se usa la marca de clase como si fuera el valor de todos los de ese intervalo: $(5 \times 4 + 15 \times 7 + 25 \times 6 + 35 \times 3) \div 20$.

Arriba: $20 + 105 + 150 + 105 = 380$. Y $380 \div 20 = 19$ **minutos** de media.

(c) Son las de los dos primeros intervalos, o sea la frecuencia acumulada del segundo: $4 + 7 = 11$ **personas**.

▲ Esa media de 19 minutos es aproximada, no exacta: se ha supuesto que las 7 personas del segundo intervalo tardan 15 minutos justos, y en realidad pueden tardar cualquier cosa entre 10 y 20. Con los datos agrupados no hay forma de afinar más, y conviene decirlo al darla.

43

Las notas de 8 alumnos en un examen sobre 10 han sido **4, 6, 6, 7, 8, 8, 8 y 9**. (a) Calcula la media. (b) Calcula la mediana. (c) Calcula el recorrido. (d) Si el profesor sube un punto a todos, di cómo cambian esos tres números.

Solución

(a) Se suman las ocho notas: $4 + 6 + 6 + 7 + 8 + 8 + 8 + 9 = 56$. Y $56 \div 8 = 7$ **puntos** de media.

(b) Hay un número par de datos, así que no hay un dato del medio: hay dos, el cuarto y el quinto, que valen 7 y 8. La mediana es su media: $(7 + 8) \div 2 = 7,5$ **puntos**.

(c) El recorrido es la diferencia entre la nota mayor y la menor: $9 - 4 = 5$ **puntos**.

(d) Las notas pasan a ser 5, 7, 7, 8, 9, 9, 9 y 10. La media sube a **8** (la suma crece en 8 puntos, uno por alumno, y $64 \div 8 = 8$) y la mediana, a **8,5**.

El **recorrido no cambia**: $10 - 5 = 5$, el mismo de antes. Sumar lo mismo a todos mueve el grupo entero sin separarlo ni juntarlo, así que las medidas que dicen «por dónde anda» suben y la que dice «cuánto se separan» se queda igual.

Probabilidad: sucesos, unión e intersección

Lo que hay que saber

Regla de Laplace: se divide el número de resultados que interesan entre el número total de resultados. Solo vale cuando todos ellos tienen la misma posibilidad de ocurrir, y comprobar eso es parte del ejercicio.

Suceso contrario: la probabilidad de que algo no ocurra es 1 menos la probabilidad de que ocurra. Con un «al menos uno» suele ser el camino corto.

Unión de dos sucesos. Para hallar la probabilidad de que ocurra uno u otro se suman las dos probabilidades y se resta la de que ocurran los dos juntos. Esa resta quita lo que se ha contado dos veces, y solo sobra cuando es imposible que los dos coincidan.

Escribir la lista de casos posibles antes de contar nada, sobre todo si el experimento tiene dos partes: al lanzar dos monedas hay cuatro casos, no tres.

Control del resultado: toda probabilidad está entre 0 y 1. Si sale mayor que 1 hay un error, y conviene empezar comprobando si algún caso se ha contado por duplicado.

- 44** Se lanza un dado equilibrado de seis caras, numeradas del 1 al 6, con la misma posibilidad cada una. Calcula la probabilidad de: (a) sacar un número par; (b) sacar un número mayor que 4; (c) sacar un número que sea par o mayor que 4.

Solución

Los seis resultados tienen la misma posibilidad, así que se puede aplicar la regla de Laplace: los que interesan, divididos entre los seis.

(a) Los pares son 2, 4 y 6, o sea 3 casos: $P = 3/6 = 1/2$.

(b) Mayores que 4 son el 5 y el 6, o sea 2 casos: $P = 2/6 = 1/3$.

(c) Contando directamente, los que son par o mayor que 4 son 2, 4, 5 y 6: cuatro casos, $P = 4/6 = 2/3$. El 6 cumple las dos cosas y se cuenta una sola vez.

Se corrige solo con la fórmula de la unión, que quita lo contado dos veces: $P(\text{par o mayor que 4}) = 1/2 + 1/3 - P(\text{par y mayor que 4})$. El único que cumple las dos es el 6, o sea $1/6$. Queda $3/6 + 2/6 - 1/6 = 4/6 = 2/3$, el mismo resultado.

▲ Sumar sin más daría $1/2 + 1/3 = 5/6$, que es falso: el 6 estaría contado dos veces, una entre los pares y otra entre los mayores que 4.

- 45** En una bolsa hay **5 bolas rojas, 3 verdes y 2 azules**, todas del mismo tamaño, y se saca una al azar sin mirar, de modo que todas tengan la misma posibilidad de salir. Calcula la probabilidad de: (a) que sea roja; (b) que no sea roja; (c) que sea verde o azul. Después di qué relación hay entre (b) y (c).

Solución

En total hay $5 + 3 + 2 = 10$ bolas, y todas tienen la misma posibilidad de salir.

(a) $P(\text{roja}) = 5/10 = 1/2$.

(b) «No roja» es el suceso contrario de «roja», y la probabilidad del contrario es 1 menos la del suceso: $1 - 1/2 = 1/2$.

(c) Las verdes y las azules son $3 + 2 = 5$ bolas, así que $P = 5/10 = 1/2$. Aquí no hay que restar nada, porque ninguna bola es verde y azul a la vez.

(b) y (c) son el mismo suceso escrito de dos maneras: no ser roja es, en esta bolsa, ser verde o ser azul. Por eso tenían que dar lo mismo, y llegar por los dos caminos es la forma de comprobarlo.

Se lanzan a la vez dos monedas equilibradas, y lo que salga en una no cambia lo que pueda salir en la otra. (a) Escribe todos los casos posibles. (b) Calcula la probabilidad de sacar dos caras. (c) Calcula la probabilidad de sacar al menos una cara.

Solución

(a) Conviene distinguir las dos monedas para no perder casos. Llamando C a cara y X a cruz, los casos son **CC, CX, XC y XX**: cuatro en total, y los cuatro igual de probables.

(b) Solo uno de los cuatro es CC, así que $P(\text{dos caras}) = \mathbf{1/4}$.

(c) «Al menos una cara» se cumple en CC, CX y XC, tres de los cuatro: $P = \mathbf{3/4}$.

Se corrige solo por el contrario, que aquí es mucho más corto: lo contrario de «al menos una cara» es «ninguna cara», o sea XX, con probabilidad $1/4$. Y $1 - 1/4 = 3/4$.

▲ Decir que hay tres casos —dos caras, dos cruces y una de cada— y contestar $1/3$ no vale. Esos tres resultados existen, pero no son igual de probables: «una de cada» ocurre de dos formas, CX y XC, y por eso vale $2/4$ mientras que las otras valen $1/4$.
