

# Matemáticas de 4º de ESO: ejercicios con soluciones

48 ejercicios con la solución explicada paso a paso, y la teoría de los 14 temas que trae esta selección.

## Lo que vas a practicar

**Números reales, intervalos y notación científica** · Clasificar números, escribir intervalos, mover la coma y acotar el error (ejercicios 1, 2, 3, 4)

**Potencias y radicales** · Sacar factores de la raíz, exponente fraccionario y racionalizar (ejercicios 5, 6, 7)

**Polinomios y factorización** · Ruffini, identidades notables, raíces y fracciones algebraicas (ejercicios 8, 9, 10, 11)

**Ecuaciones de segundo grado y ecuaciones con radicales** · La fórmula, el discriminante, las soluciones extrañas y las bicuadradas (ejercicios 12, 13, 14, 15)

**Sistemas de ecuaciones e inecuaciones** · Sistemas no lineales, sistemas con más ecuaciones que incógnitas e inecuaciones (ejercicios 16, 17, 18, 19)

**Sucesiones y progresiones** · Término general, suma de una progresión aritmética y razón de una geométrica (ejercicios 20, 21, 22)

**Funciones: dominio, crecimiento y tasa de variación media** · Dónde existe una función, cuándo sube y cuánto sube de media (ejercicios 23, 24, 25)

**Función lineal y función cuadrática** · Recta por dos puntos, vértice de la parábola y corte entre las dos (ejercicios 26, 27, 28, 29)

**Proporcionalidad inversa y función exponencial** · La hipérbola  $y = k/x$ , el crecimiento exponencial y el decrecimiento (ejercicios 30, 31, 32)

**Semejanza y teorema de Tales** · Segmentos proporcionales, escalas y la razón en áreas y volúmenes (ejercicios 33, 34, 35)

**Trigonometría del triángulo rectángulo** · Seno, coseno y tangente, los valores exactos y resolver el triángulo (ejercicios 36, 37, 38, 39)

**Geometría analítica en el plano** · Distancia, punto medio, ecuación de la recta, paralelas y perpendiculares (ejercicios 40, 41, 42)

**Estadística de una y de dos variables** · Desviación típica, coeficiente de variación, ajuste lineal y recuento cruzado (ejercicios 43, 44, 45)

**Probabilidad compuesta y condicionada** · Con y sin devolución, sucesos incompatibles e independientes, y causas (ejercicios 46, 47, 48)

**Material propio de solucionario.es.** Los enunciados y las soluciones están escritos por nosotros. La versión al día, con más ejercicios y de todos los cursos, está siempre en:

**[solucionario.es](https://solucionario.es)**

**Qué entra aquí y qué no.** Esta página cubre **Matemáticas B** de 4º de ESO: es la opción que hace el papel de las antiguas «enseñanzas académicas» y la que prepara 1º de Bachillerato, porque es la que trae el álgebra, las funciones y la trigonometría con las que arranca ese curso. ▪ **No está pensada para Matemáticas A** (las «aplicadas»): quien curse A se encontrará aquí trigonometría, geometría analítica y sistemas no lineales, que no son de su programa, y en cambio **no encontrará** la parte financiera —intereses, tasas y porcentajes encadenados— que sí es suya, salvo el interés compuesto, que se queda por ser el ejemplo con el que se explica la función exponencial. Entran los catorce temas del cuadro: números reales e intervalos, radicales, polinomios y factorización, ecuaciones de segundo grado y con radicales, sistemas e inecuaciones, sucesiones y progresiones, funciones con su dominio y su tasa de variación media, la recta y la parábola, la proporcionalidad inversa y la exponencial, semejanza y Tales, trigonometría del triángulo rectángulo, geometría analítica, estadística de una y de dos variables, y probabilidad compuesta y condicionada. **Quedan fuera a propósito**, y son ya de 1º de Bachillerato: los límites y las derivadas —aquí solo la tasa de variación media, que es el escalón previo—, los logaritmos, la trigonometría de ángulos que no son agudos, los números complejos y la combinatoria con sus fórmulas. Se da por sabido lo de 3º: fracciones, potencias de exponente entero, ecuaciones de primer grado, el teorema de Pitágoras y las medidas de centralización. Todo se resuelve con lápiz, papel y una calculadora corriente. Esto sirve para localizar lo que flojea; no sustituye al libro ni a las clases.

# Matemáticas de 4º de ESO: ejercicios con soluciones

## Números reales, intervalos y notación científica

### Lo que hay que saber

**Racional** es todo número que se puede escribir como una fracción de enteros. **Irracional**, el que no. Los dos juntos forman los **números reales**.

▲ Un decimal con infinitas cifras *no* es por eso irracional:  $0,333... = 1/3$  y  $0,2727... = 3/11$  son racionales. Lo que distingue al racional es que sus decimales, o se acaban, o repiten un grupo de cifras una y otra vez.

**Intervalos:** el corchete incluye el extremo y el paréntesis lo deja fuera.  $[2, 5)$  son los  $x$  con  $2 \leq x < 5$ . Junto a  $+\infty$  o  $-\infty$  va paréntesis, porque no son números.

**Notación científica:** una sola cifra distinta de cero delante de la coma, por una potencia de 10. Exponente **positivo** si el número es mayor o igual que 10 y **negativo** si está entre 0 y 1.

Para **multiplicar** dos cantidades en notación científica: por un lado el producto de las dos partes decimales y por otro la suma de los dos exponentes. Al **dividir**, cociente y resta. Y antes de **sumar** hay que dejar las dos cantidades con el mismo exponente.

**Error absoluto** = diferencia (sin signo) entre el valor aproximado y el exacto. **Error relativo** = error absoluto  $\div$  el **valor absoluto** del valor exacto (que no puede ser cero), y se suele dar en tanto por ciento. El relativo es el que dice si la aproximación es buena: 268 sobre 148.732 es poco, y 268 sobre 300 sería muchísimo.

1

Di a qué conjunto numérico pertenece cada uno de estos cinco números y justifícalo:  $\sqrt{36}$ ,  $-7/4$ ,  $0,2727...$  (el 27 se repite sin final),  $\sqrt{7}$  y **3,1416**.

### Solución

$\sqrt{36} = 6$ : es natural, y por tanto también entero, racional y real.

$-7/4 = -1,75$ : racional (cociente de dos enteros) y real. No es entero.

**0,2727... es racional.** Se ve pasándolo a fracción: si  $N = 0,2727...$ , entonces  $100N = 27,2727...$  y al restar queda  $99N = 27$ , o sea  $N = 27/99 = 3/11$ . Comprobación:  $3 \div 11 = 0,272727...$

**$\sqrt{7}$  es irracional:** 7 no es un cuadrado perfecto —está entre  $2^2 = 4$  y  $3^2 = 9$ , así que su raíz está entre 2 y 3 y no es entera—, y la raíz cuadrada de un entero que no es cuadrado perfecto no se puede escribir como fracción. Por eso su expresión decimal no termina y no repite ningún grupo de cifras.

**3,1416 es racional:** tiene un número finito de decimales, así que vale  $31.416/10.000 = 3.927/1.250$ .

▲ No es el número al que se aproxima la longitud de una circunferencia entre su diámetro: ese es irracional y 3,1416 solo se le parece en las cuatro primeras cifras.

2

Escribe como intervalo: (a) los números  $x$  que cumplen  $-3 \leq x < 5$ ; (b) los que cumplen  $x > 2$ . Después escribe la **intersección** de los dos y di si el 2 y el 5 pertenecen a ella.

### Solución

(a) El  $-3$  entra y el 5 no, así que se cierra por la izquierda y se abre por la derecha:  **$[-3, 5)$** .

(b) No hay tope por arriba y el 2 no entra:  **$(2, +\infty)$** .

La intersección son los números que cumplen **las dos condiciones a la vez**: tienen que ser mayores que 2 y menores que 5. Sale  **$(2, 5)$** .

**Ni el 2 ni el 5 pertenecen:** el 2 está excluido por la segunda condición y el 5 por la primera. Para corregirte, prueba un número de dentro y otro de fuera: el 3 cumple  $-3 \leq 3 < 5$  y  $3 > 2$ ; el 2 falla la segunda y el 5 falla la primera.

3

Escribe en notación científica **0,000000472** y **8.300.000.000**, y calcula dejando el resultado como un número corriente:  $(3,2 \cdot 10^8) \cdot (5 \cdot 10^{-3}) \div (8 \cdot 10^4)$

#### Solución

**0,000000472** =  $4,72 \cdot 10^{-7}$ . La coma se mueve 7 lugares a la derecha hasta dejar una sola cifra distinta de cero delante, y por eso el exponente es  $-7$ .

**8.300.000.000** =  $8,3 \cdot 10^9$ . Aquí la coma se mueve 9 lugares a la izquierda y el exponente es positivo.

En el producto se multiplican por un lado los números y por otro las potencias:  $3,2 \cdot 5 = 16$  y  $10^8 \cdot 10^{-3} = 10^5$ . Queda  $16 \cdot 10^5 = 1,6 \cdot 10^6$ .

Al dividir se restan los exponentes:  $1,6 \div 8 = 0,2$  y  $10^6 \div 10^4 = 10^2$ . Sale  $0,2 \cdot 10^2 = 20$ .

▲ Ojo al ordenar magnitudes:  $4,72 \cdot 10^{-7}$  es menor que  $8,3 \cdot 10^9$  aunque «472» tenga más cifras que «83». Lo que manda es el exponente, y solo si los dos exponentes son iguales se mira el número de delante.

4

La población de una ciudad es de **148.732 habitantes**. Redondéala a **millares** y calcula el **error absoluto** y el **error relativo** del redondeo, este último en tanto por ciento con dos decimales.

#### Solución

Redondear a millares es quedarse con el múltiplo de 1.000 más cercano. Las tres últimas cifras son 732, que pasa de 500, así que se sube: **149.000 habitantes**.

**Error absoluto** = diferencia entre el valor aproximado y el exacto, en valor absoluto:  $149.000 - 148.732 = 268$  habitantes.

**Error relativo** = error absoluto  $\div$  valor exacto =  $268 \div 148.732 = 0,0018018...$  Multiplicado por 100 queda **0,18 %**.

Para saber si el resultado es razonable: redondear a millares nunca se desvía más de 500, y 500 sobre 148.732 es menos del 0,34 %. Un error relativo del 0,18 % cae dentro de ese tope; si te hubiera salido un 18 %, hay un factor 100 de más en alguna parte: puede estar en la división o en el paso a tanto por ciento.

## Potencias y radicales

### Lo que hay que saber

**Sacar factores de una raíz:** se descompone el radicando y sale fuera lo que esté al cuadrado.  $\sqrt{72} = \sqrt{(36 \cdot 2)} = 6\sqrt{2}$ .

**Radicales semejantes** son los que tienen el mismo radicando después de simplificarlos. Solo esos se suman y se restan, juntando los números de delante.

▲ Una suma que esté debajo del signo  $\sqrt{\quad}$  **no se puede separar:**  $\sqrt{(9 + 16)} = \sqrt{25} = 5$ , y en cambio  $\sqrt{9} + \sqrt{16} = 3 + 4 = 7$ . Con un producto o un cociente de números **no negativos** sí vale:  $\sqrt{(a \cdot b)} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ .

**Exponente fraccionario** (con la base positiva): el denominador es el índice de la raíz y el numerador, el exponente.  $8^{2/3}$  es la raíz cúbica de 8, elevada al cuadrado, o sea 4.

**Exponente negativo** (con a distinto de cero) = dar la vuelta:  $a^{-n} = 1 \div a^n$ . No hace negativo el resultado.

**Racionalizar:** quitar la raíz del denominador multiplicando arriba y abajo por lo mismo. Si abajo hay una sola raíz, por esa raíz; si hay una suma o una resta de raíces, por la misma expresión con el signo del medio cambiado.

5

Simplifica cada radical y opera:  $\sqrt{75} + \sqrt{12} - \sqrt{48}$

### Solución

Se descompone el radicando y se saca fuera lo que esté al cuadrado.

$\sqrt{75} = \sqrt{(25 \cdot 3)} = 5\sqrt{3}$ . Después  $\sqrt{12} = \sqrt{(4 \cdot 3)} = 2\sqrt{3}$ . Y  $\sqrt{48} = \sqrt{(16 \cdot 3)} = 4\sqrt{3}$ .

Ya son radicales semejantes (el mismo radicando), así que se suman y restan los números de delante:  $5 + 2 - 4 = 3$ . Resultado:  $3\sqrt{3}$ .

▲ Solo se pueden juntar así los que tienen *el mismo* radicando.  $\sqrt{2} + \sqrt{3}$  se queda como está, y desde luego no es  $\sqrt{5}$ : elevando al cuadrado,  $(\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 = 2 + 3 + 2\sqrt{6}$ , que no es 5.

Para corregirte sin calculadora:  $3\sqrt{3}$  al cuadrado es  $9 \cdot 3 = 27$ , o sea que el resultado está entre 5 y 6 (porque  $5^2 = 25$  y  $6^2 = 36$ ).

6

Calcula sin calculadora: (a)  $27^{2/3}$ ; (b)  $\sqrt{(2^5)} \cdot \sqrt{2}$ ; (c)  $16^{-3/4}$

### Solución

El exponente fraccionario se lee así: el **denominador** es el índice de la raíz y el **numerador**, el exponente de dentro.

(a)  $27^{2/3}$  es la raíz cúbica de 27 elevada al cuadrado. La raíz cúbica de 27 es 3, porque  $3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$ . Y  $3^2 = 9$ .

(b) Las dos raíces tienen el mismo índice, así que se juntan en una:  $\sqrt{(2^5 \cdot 2)} = \sqrt{(2^6)}$ . Y la raíz cuadrada de  $2^6$  es  $2^{6/2} = 2^3 = 8$ .

(c) El exponente negativo da la vuelta a la fracción:  $16^{-3/4} = 1 \div 16^{3/4}$ . La raíz cuarta de 16 es 2, y  $2^3 = 8$ , así que queda  $1/8$ .

▲ Un exponente negativo *no* hace negativo el resultado:  $16^{-3/4} = 1/8$ , que es positivo. Lo que hace es invertir.

7

Racionaliza el denominador: (a)  $6/\sqrt{3}$ ; (b)  $10/(\sqrt{7} - \sqrt{2})$

### Solución

Racionalizar es quitar la raíz de abajo sin cambiar el valor de la fracción, multiplicando arriba y abajo por lo mismo.

(a) Se multiplica por  $\sqrt{3}$  arriba y abajo:  $6\sqrt{3} \div (\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}) = 6\sqrt{3} \div 3 = 2\sqrt{3}$ .

(b) Con una resta de raíces abajo se multiplica por la **misma resta cambiada de signo**,  $\sqrt{7} + \sqrt{2}$ , porque  $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$  y las raíces desaparecen.

Abajo queda  $(\sqrt{7})^2 - (\sqrt{2})^2 = 7 - 2 = 5$ . Arriba,  $10(\sqrt{7} + \sqrt{2})$ . Y  $10 \div 5 = 2$ , así que sale  $2\sqrt{7} + 2\sqrt{2}$ .

Comprobación aproximada:  $\sqrt{7} \approx 2,646$  y  $\sqrt{2} \approx 1,414$ , así que  $\sqrt{7} - \sqrt{2} \approx 1,232$  y  $10 \div 1,232 \approx 8,12$ . Por el otro lado,  $2 \cdot 2,646 + 2 \cdot 1,414 \approx 8,12$ . Coinciden.

## Polinomios y factorización

### Lo que hay que saber

**Identidades notables:**  $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$  —  $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$  —  $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$ .

▲  $(a + b)^2$  no es  $a^2 + b^2$ : falta el doble producto. Con  $a = 3$  y  $b = 4$  se ve en un segundo, porque 49 no es 25.

**Orden para factorizar:** primero **factor común**, después mirar si hay una identidad notable, y por último buscar raíces (Ruffini o la fórmula de segundo grado).

**Teorema del resto:** el resto de dividir  $P(x)$  entre  $x - a$  vale  $P(a)$ . Si  $P(a) = 0$ , entonces  $a$  es raíz y  $x - a$  es divisor. Es lo que justifica Ruffini.

**Ruffini** solo sirve para dividir entre  $x - a$ , y las raíces enteras que puede tener un polinomio de coeficientes enteros son **divisores del término independiente**: por ahí se empieza a probar.

**Fracciones algebraicas:** se simplifican factorizando arriba y abajo y tachando factores *enteros*. ■ No se puede tachar un sumando: en  $(x + 3) \div (x + 5)$  no se quita la  $x$ .

8 Divide por Ruffini  $x^3 - 4x^2 + x + 6$  entre  $x - 3$  y factoriza el polinomio por completo.

#### Solución

Se colocan los coeficientes 1, -4, 1, 6 y se usa el 3 (el valor que anula  $x - 3$ ).

Se baja el 1. Luego  $1 \cdot 3 = 3$  y  $-4 + 3 = -1$ . Luego  $-1 \cdot 3 = -3$  y  $1 + (-3) = -2$ . Y por último  $-2 \cdot 3 = -6$  y  $6 + (-6) = 0$ .

El resto es 0, así que  $x - 3$  es divisor. El cociente es  $x^2 - x - 2$ .

Ese cociente se factoriza resolviendo  $x^2 - x - 2 = 0$ : sus soluciones son 2 y -1, así que  $x^2 - x - 2 = (x - 2)(x + 1)$ .

$$x^3 - 4x^2 + x + 6 = (x - 3)(x - 2)(x + 1)$$

Para corregirte sin multiplicarlo todo: el término independiente del producto tiene que salir del producto de los tres números que cierran los paréntesis,  $(-3)(-2)(1) = 6$ , que es el que había. Ojo: son esos tres, no las raíces, que son 3, 2 y -1.

9 Factoriza por completo: (a)  $4x^2 - 25$ ; (b)  $x^2 - 10x + 25$ ; (c)  $2x^3 - 8x$

#### Solución

(a) Es una **diferencia de cuadrados**:  $4x^2 = (2x)^2$  y  $25 = 5^2$ . Queda  $(2x - 5)(2x + 5)$ .

(b) Tiene forma de **cuadrado de una resta**. El doble producto tendría que ser  $2 \cdot x \cdot 5 = 10x$ , y es justo lo que hay:  $(x - 5)^2$ .

(c) Primero **factor común**, que es lo que más se olvida:  $2x^3 - 8x = 2x(x^2 - 4)$ . Y  $x^2 - 4$  vuelve a ser diferencia de cuadrados:  $2x(x - 2)(x + 2)$ .

▲ En (b) hay que mirar el término del medio antes de decidir:  $x^2 + 25$  no se puede factorizar con números reales, y  $x^2 - 10x + 24$  tampoco es un cuadrado perfecto aunque se le parezca (se factoriza como  $(x - 4)(x - 6)$ ).

10 Calcula el valor de  $k$  para que  $P(x) = x^3 + kx^2 - 5x + 6$  sea divisible entre  $x + 2$ , y factoriza el polinomio que resulta.

#### Solución

Ser divisible entre  $x + 2$  significa que el resto de esa división es 0, y por el teorema del resto ese resto vale  $P(-2)$ .

$$P(-2) = (-2)^3 + k(-2)^2 - 5(-2) + 6 = -8 + 4k + 10 + 6 = 4k + 8.$$

Se iguala a cero:  $4k + 8 = 0$ , así que  $k = -2$ .

El polinomio es  $P(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$ . Por Ruffini con  $-2$ : se baja 1;  $1 \cdot (-2) = -2$  y  $-2 + (-2) = -4$ ;  $-4 \cdot (-2) = 8$  y  $-5 + 8 = 3$ ;  $3 \cdot (-2) = -6$  y  $6 + (-6) = 0$ . El cociente es  $x^2 - 4x + 3$ .

$x^2 - 4x + 3 = 0$  tiene por soluciones 1 y 3, así que  $P(x) = (x + 2)(x - 1)(x - 3)$ .

Comprobación: si las raíces son  $-2$ , 1 y 3, su suma debe ser el coeficiente de  $x^2$  cambiado de signo.  $-2 + 1 + 3 = 2$ , y el coeficiente es  $-2$ . Cuadra.

11

Simplifica  $(x^2 - 9) \div (x^2 + 6x + 9)$  y di para qué valores de  $x$  no se puede calcular.

#### Solución

Se factorizan arriba y abajo:  $x^2 - 9 = (x - 3)(x + 3)$  y  $x^2 + 6x + 9 = (x + 3)^2$ .

Queda  $(x - 3)(x + 3) \div (x + 3)^2$ , y se tacha un  $(x + 3)$  arriba y otro abajo:  $(x - 3) \div (x + 3)$ .

No se puede calcular donde el denominador se anule:  $x + 3 = 0$ , o sea  $x = -3$ . Ese valor ya estaba prohibido en la fracción de partida, porque  $(x + 3)^2$  también se anula ahí.

▲ Simplificar no devuelve el valor prohibido. La expresión simplificada se parece a una fracción cualquiera, pero sigue sin poder calcularse en  $x = -3$ : es el mismo problema, escrito más corto.

Para corregirte, prueba un valor fácil en las dos formas. Con  $x = 0$ : arriba  $-9$ , abajo 9, cociente  $-1$ . Y con la simplificada,  $(0 - 3) \div (0 + 3) = -1$ . Coinciden.

## Ecuaciones de segundo grado y ecuaciones con radicales

### Lo que hay que saber

**Fórmula:**  $x = (-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}) \div (2a)$ , para  $ax^2 + bx + c = 0$  con  $a$  distinto de 0.

**Discriminante**  $b^2 - 4ac$ : positivo, dos soluciones reales distintas; cero, una sola (doble); negativo, **ninguna solución real** (en cursos posteriores sí hay solución, con otros números).

**Suma y producto de las soluciones:** valen  $-b \div a$  y  $c \div a$ . Comprobar con las dos es más fino que sustituir una, porque un cambio de signo en las dos deja el producto intacto y solo se nota en la suma.

**Incompletas, sin fórmula:**  $ax^2 + bx = 0$  se resuelve sacando factor común,  $x(ax + b) = 0$ , y da  $x = 0$  y  $x = -b/a$ ;  $ax^2 + c = 0$  se resuelve despejando  $x^2$ . ■ Dividir entre  $x$  la primera *pierde* la solución  $x = 0$ , y esa pérdida no se descubre sustituyendo: la solución que queda sí cumple la ecuación.

**Ecuación con radical:** se deja la raíz sola y se elevan al cuadrado los dos miembros. Eso **puede añadir soluciones que no valen**, porque el cuadrado borra el signo. Por eso hay que comprobar las candidatas **en la ecuación original**, la que tiene la raíz: en la ya elevada al cuadrado las falsas también encajan.

**Bicuadrada**  $ax^4 + bx^2 + c = 0$ , con  $a$  distinto de 0: se llama  $z = x^2$ , se resuelve en  $z$  y se deshace el cambio. Cada  $z$  positiva da dos valores de  $x$ ,  $z = 0$  da uno solo (el propio 0) y cada  $z$  negativa, ninguno.

12

Resuelve  $2x^2 - 7x + 3 = 0$  y comprueba el resultado con la **suma y el producto** de las soluciones.

#### Solución

Con  $a = 2$ ,  $b = -7$  y  $c = 3$ , el discriminante vale  $b^2 - 4ac = 49 - 24 = 25$ , y  $\sqrt{25} = 5$ .

$x = (7 \pm 5) \div 4$ . Por un lado  $(7 + 5) \div 4 = 3$  y por otro  $(7 - 5) \div 4 = 1/2$ .

**La comprobación:** en toda ecuación de segundo grado la suma de las soluciones vale  $-b \div a$  y el producto,  $c \div a$ .

Suma:  $3 + 1/2 = 7/2$ , y  $-b \div a = 7 \div 2 = 7/2$ . Producto:  $3 \cdot 1/2 = 3/2$ , y  $c \div a = 3 \div 2 = 3/2$ . Las dos cuadran.

Esta comprobación usa **las dos soluciones a la vez**, y por eso ve cosas que sustituir no ve. Si se te cambian de signo *las dos* ( $-3$  y  $-1/2$  en vez de 3 y  $1/2$ ), el producto sigue dando  $3/2$  y parece

correcto: es la suma, que pasa a valer  $-7/2$ , la que lo delata.

- 13** Sin resolverlas, di cuántas soluciones reales tiene cada una y compruébalo después: (a)  $x^2 - 6x + 9 = 0$ ; (b)  $x^2 + x + 1 = 0$

#### Solución

Lo decide el **discriminante**,  $b^2 - 4ac$ .

(a)  $36 - 36 = 0$ : hay una única solución, que se llama doble. Sale  $x = 6 \div 2 = 3$ . Y se ve también factorizando:  $x^2 - 6x + 9 = (x - 3)^2$ , que solo se anula en  $x = 3$ .

(b)  $1 - 4 = -3$ , negativo: **no tiene ninguna solución real**, porque haría falta la raíz cuadrada de un número negativo.

▲ Cuidado con decir «no tiene solución» a secas: lo correcto en este curso es que **no tiene solución real**. En 1º de Bachillerato aparecen números que sí resuelven esa ecuación, y no es que ahora esté mal resuelta.

Para corregirte en (b) sin calcular nada:  $x^2 + x + 1$  se puede escribir como  $(x + 1/2)^2 + 3/4$ . El cuadrado de un número real nunca es negativo, así que esa suma vale al menos  $3/4$  y no llega a cero con ningún número real.

- 14** Resuelve  $\sqrt{x + 5} = x - 1$ . Comprueba las dos candidatas y explica cuál sirve.

#### Solución

Para quitar la raíz se elevan al cuadrado los dos miembros:  $x + 5 = (x - 1)^2 = x^2 - 2x + 1$ .

Se pasa todo a un lado:  $x^2 - 3x - 4 = 0$ . Con la fórmula, discriminante  $9 + 16 = 25$  y  $x = (3 \pm 5) \div 2$ , o sea  $x = 4$  y  $x = -1$ .

**Se comprueban en la ecuación de partida, la que tiene la raíz.** Con  $x = 4$ :  $\sqrt{9} = 3$  y  $4 - 1 = 3$ . Vale. Con  $x = -1$ :  $\sqrt{4} = 2$  y  $-1 - 1 = -2$ . El símbolo  $\sqrt{\phantom{x}}$  significa la raíz **no negativa**, así que 2 no es  $-2$  y  $x = -1$  **no sirve**.

**La única solución es  $x = 4$ .**

▲ Y aquí está lo que hay que entender:  **$x = -1$  sí cumple la ecuación elevada al cuadrado** (por la izquierda  $-1 + 5 = 4$ , por la derecha  $(-1 - 1)^2 = 4$ ). Por eso comprobar no sirve de nada si lo haces en la ecuación ya elevada al cuadrado: hay que volver a la original. Elevar al cuadrado no es una operación reversible, y puede *añadir* soluciones que la ecuación de partida no tenía.

- 15** Resuelve la ecuación bicuadrada  $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$

#### Solución

Se llama  $z = x^2$ . Como  $x^4 = (x^2)^2 = z^2$ , la ecuación pasa a ser  $z^2 - 13z + 36 = 0$ .

Discriminante:  $169 - 144 = 25$ , y  $\sqrt{25} = 5$ . Entonces  $z = (13 \pm 5) \div 2$ , o sea  $z = 9$  y  $z = 4$ .

Ahora se deshace el cambio. De  $x^2 = 9$  salen  $x = 3$  y  $x = -3$ . De  $x^2 = 4$  salen  $x = 2$  y  $x = -2$ .

**Hay cuatro soluciones:  $-3, -2, 2$  y  $3$ .**

▲ Es el punto donde más se pierde media respuesta: cada valor positivo de  $z$  da *dos* valores de  $x$ , uno con cada signo; si saliera  $z = 0$  daría uno solo,  $x = 0$ , y si saliera negativo no daría ninguno, porque ningún número real al cuadrado es negativo.

Para corregirte, sustituye una de las cuatro en la ecuación de partida: con  $x = 3$ ,  $x^4 = 81$ ,  $13x^2 = 117$  y  $81 - 117 + 36 = 0$ . Y las soluciones van por parejas de signo contrario, porque en la ecuación solo aparecen potencias pares de  $x$ .

## Sistemas de ecuaciones e inecuaciones

### Lo que hay que saber

**Sistemas lineales:** sustitución, igualación o reducción. Con dos rectas, la solución es el punto donde se cortan; si son paralelas no hay solución y si son la misma recta hay infinitas.

▲ Tener **más ecuaciones que incógnitas** no condena el sistema. Se eligen dos que por sí solas tengan **una única solución** y esa pareja se prueba en las demás: si encaja, hay solución; si no, no la hay. ■ Con dos ecuaciones que ya dejen infinitas parejas, descartar una de ellas no demuestra nada.

**Sistemas no lineales:** lo práctico es despejar de la ecuación sencilla y sustituir en la otra. Suelen salir dos parejas de valores, y **cada x va con su y**: no se pueden mezclar.

**Inecuación de primer grado:** se despeja como una ecuación, con una sola diferencia: al multiplicar o dividir por un número **negativo** se cambia el sentido de la desigualdad.

**Inecuación de segundo grado:** se resuelve la ecuación asociada, sus soluciones parten la recta en tramos y se **prueba un número de cada tramo**. Es más seguro que recordar una regla, porque el signo del coeficiente de  $x^2$  cambia el resultado.

La solución de una inecuación se escribe como **intervalo**, y puede ser más de uno.

**16** Resuelve el sistema formado por  $x + y = 7$  y  $x^2 + y^2 = 25$

#### Solución

Como una de las dos ecuaciones es sencilla, se despeja de ella:  $y = 7 - x$ .

Se sustituye en la otra:  $x^2 + (7 - x)^2 = 25$ , o sea  $x^2 + 49 - 14x + x^2 = 25$ .

Se ordena:  $2x^2 - 14x + 24 = 0$ , y dividiendo todo entre 2 queda  $x^2 - 7x + 12 = 0$ .

Discriminante  $49 - 48 = 1$ , así que  $x = (7 \pm 1) \div 2$ :  $x = 4$  y  $x = 3$ .

Cada valor de  $x$  da su  $y$ : si  $x = 4$ ,  $y = 3$ ; si  $x = 3$ ,  $y = 4$ . **Las soluciones son (4, 3) y (3, 4)**, y las dos hay que escribirlas.

Comprobación de la segunda ecuación, que es la que se ha transformado:  $4^2 + 3^2 = 16 + 9 = 25$ . Cuadra.

**17** Estudia si este sistema de **tres ecuaciones y dos incógnitas** tiene solución:  $x + y = 10$ ,  $x - y = 4$  y  $2x + y = 17$ . Repite el estudio cambiando la tercera por  $2x + y = 18$ .

#### Solución

Se resuelven dos de ellas y se lleva el resultado a la tercera. Sumando las dos primeras:  $2x = 14$ , así que  $x = 7$ , y de la primera,  $y = 3$ .

Se prueba en la tercera:  $2 \cdot 7 + 3 = 17$ . **Sí se cumple**, así que el sistema tiene solución y es  $x = 7$ ,  $y = 3$ .

Con  $2x + y = 18$  el par (7, 3) da 17, que no es 18. Las dos primeras obligan a  $x = 7$  e  $y = 3$ , y ese par no vale para la tercera: el sistema **no tiene solución**.

▲ Lo que hay que sacar de aquí: tener más ecuaciones que incógnitas **no** significa quedarse sin solución. Significa que sobra información, y esa información de más puede ser compatible con lo demás (primer caso) o contradecirlo (segundo). Hay que comprobarlo, no darlo por hecho.

18

Resuelve la inecuación  $3 - 2x \geq 9$  y escribe la solución como intervalo.

#### Solución

Se pasa el 3 restando:  $-2x \geq 6$ .

Ahora se divide entre  $-2$ , y al dividir entre un número negativo **la desigualdad cambia de sentido**:  $x \leq -3$ .

Solución:  $(-\infty, -3]$ , con el  $-3$  incluido porque la desigualdad no es estricta.

Para corregirte, prueba un valor de dentro y otro de fuera. Con  $x = -4$ :  $3 - 2(-4) = 11$ , y  $11 \geq 9$ . Vale. Con  $x = 0$ :  $3 \geq 9$  es falso, y el 0 está fuera. Si hubieras olvidado darle la vuelta al signo habrías contestado  $x \geq -3$ , y el 0 estaría dentro: la prueba lo delata.

▲ Esa prueba caza un conjunto solución *equivocado*, pero no caza uno *incompleto*. Si la solución fueran dos trozos y solo escribes uno, el valor que pruebes puede caer en el trozo bueno y no notarás que falta el otro.

19

Resuelve la inecuación de segundo grado  $x^2 - x - 6 < 0$

#### Solución

Primero se resuelve la ecuación asociada  $x^2 - x - 6 = 0$ . Discriminante  $1 + 24 = 25$ ,  $x = (1 \pm 5) \div 2$ , soluciones **3** y **-2**.

Esas dos soluciones parten la recta en tres tramos: los números menores que  $-2$ , los que están entre  $-2$  y  $3$ , y los mayores que  $3$ .

Se prueba un número de cada tramo. Con  $x = -3$ :  $9 + 3 - 6 = 6$ , positivo. Con  $x = 0$ :  $-6$ , negativo. Con  $x = 4$ :  $16 - 4 - 6 = 6$ , positivo.

Se pide que sea menor que cero, así que la solución es el tramo del medio:  **$(-2, 3)$** . Los extremos quedan fuera porque ahí la expresión vale exactamente 0, no menos.

▲ El signo del coeficiente de  $x^2$  decide qué tramos valen. Aquí es positivo, y entonces la expresión es negativa *entre* las dos soluciones. Si fuera negativo pasaría justo lo contrario, así que probar un número de cada tramo es más seguro que recordar la regla.

## Sucesiones y progresiones

### Lo que hay que saber

**Progresión aritmética:** cada término es el anterior **más** una cantidad fija  $d$ . Término general  $a_n = a_1 + (n - 1)d$  y suma de los  $n$  primeros  $S_n = (a_1 + a_n) \cdot n \div 2$ .

**Progresión geométrica:** cada término es el anterior **por** una cantidad fija  $r$ . Término general  $a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$  y suma de los  $n$  primeros  $S_n = a_1 \cdot (1 - r^n) \div (1 - r)$ , válida cuando  $r$  no vale 1.

▲ Los términos de una geométrica **no tienen por qué crecer**: con  $r$  entre 0 y 1 se acercan a cero y con  $r$  negativa van cambiando de signo. Y cuenta el signo del primero:  $-8, -4, -2, -1\dots$  tiene razón  $1/2$  y va *subiendo*.

Entre el término **p** y el término **q** hay  **$q - p$**  saltos, no  $q - p + 1$ . De  $a_3$  a  $a_8$  hay cinco.

▲ Para decidir si una sucesión es una progresión hay que mirar **todas** las restas (o todos los cocientes) que tengas, no solo la primera: 1, 3, 5, 9 empieza pareciendo aritmética y no lo es.

Muchas sucesiones no son ni aritméticas ni geométricas (1, 4, 9, 16... son los cuadrados). Que no encaje en ninguna de las dos no significa que esté mal planteada.

20

En una progresión aritmética se sabe que  $a_3 = 11$  y  $a_8 = 31$ . Halla la diferencia, el primer término,  $a_{20}$  y la suma de los veinte primeros términos.

#### Solución

Del término 3 al 8 hay **cinco** saltos de diferencia  $d$  (no ocho: se restan las posiciones,  $8 - 3 = 5$ ).

$31 - 11 = 20$ , y  $20 \div 5 = d = 4$ .

Para volver del tercero al primero se retroceden dos saltos:  $a_1 = 11 - 2 \cdot 4 = 3$ .

Término general:  $a_n = 3 + (n - 1) \cdot 4$ . Entonces  $a_{20} = 3 + 19 \cdot 4 = 79$ .

Suma de los veinte primeros:  $S = (a_1 + a_{20}) \cdot 20 \div 2 = (3 + 79) \cdot 10 = 820$ .

Para corregirte, vuelve a calcular  $a_3$  y  $a_8$  con tu término general:  $3 + 2 \cdot 4 = 11$  y  $3 + 7 \cdot 4 = 31$ . Son los dos datos del enunciado.

21

Una progresión geométrica empieza en  $a_1 = 96$  y tiene razón  $r = 1/2$ . Escribe los cinco primeros términos, calcula  $a_5$  con la fórmula y la suma de esos cinco.

#### Solución

Cada término sale del anterior multiplicando por  $1/2$ : **96, 48, 24, 12 y 6**.

Con la fórmula del término general,  $a_5 = a_1 \cdot r^4 = 96 \cdot (1/2)^4 = 96 \div 16 = 6$ . Coincide con la lista.

Suma de los cinco:  $96 + 48 + 24 + 12 + 6 = 186$ .

Con la fórmula:  $S = a_1 \cdot (1 - r^5) \div (1 - r) = 96 \cdot (1 - 1/32) \div (1/2) = 96 \cdot (31/32) \cdot 2 = 186$ . Las dos formas dan lo mismo, y esa es la comprobación.

▲ Aquí los términos **decrecen**, y cuenta que el primero sea positivo: con el primer término positivo, una progresión geométrica solo crece si la razón es mayor que 1, y con razón entre 0 y 1 se va haciendo pequeña. Con el primer término negativo pasa lo contrario. Y con razón negativa va saltando de signo (3, -6, 12, -24...), sin crecer ni decrecer.

22

Los primeros términos de una sucesión son **1, 3, 5, 9**. ¿Es una progresión aritmética? Después haz lo mismo con **2, 6, 18, 54** y, si encaja con una progresión y das por hecho que sigue igual, escribe su término general y calcula el séptimo término.

#### Solución

**1, 3, 5, 9 no es una progresión aritmética.** Las diferencias entre términos consecutivos son  $3 - 1 = 2$ ,  $5 - 3 = 2$  y  $9 - 5 = 4$ . La última rompe el patrón.

▲ Por eso no basta con restar los dos primeros términos: ahí la diferencia salía 2 y todo parecía en orden. Hay que comprobar *todas* las restas seguidas que tengas.

**2, 6, 18, 54 encaja con una progresión geométrica.** Los cocientes son  $6 \div 2 = 3$ ,  $18 \div 6 = 3$  y  $54 \div 18 = 3$ : si sigue igual, la razón es  $r = 3$ .

Con cuatro términos no se puede *demostrar* que lo sea: hay sucesiones que empiezan igual y luego se separan. Lo que se hace es dar por bueno que el patrón continúa, y así lo plantea el enunciado.

Término general:  $a_n = 2 \cdot 3^{n-1}$ .

Séptimo término, con esa suposición:  $a_7 = 2 \cdot 3^6 = 2 \cdot 729 = 1.458$ . Se puede comprobar siguiendo la lista: 54, 162, 486, 1.458.

## Funciones: dominio, crecimiento y tasa de variación media

### Lo que hay que saber

**Dominio** = valores de  $x$  con los que se puede calcular la función. Los dos frenos de este curso: **no dividir entre cero** y **no meter un número negativo dentro de una raíz cuadrada**.

**Imagen de un valor:**  $f(3)$  es lo que vale la función en  $x = 3$ . Se calcula sustituyendo.

**Tasa de variación media** entre  $a$  y  $b = (f(b) - f(a)) \div (b - a)$ . Si la función mide algo con unidades, la tasa las lleva también: euros por mes, metros por segundo.

▲ La tasa de variación media solo compara **los dos extremos**. Que salga positiva no garantiza que la función suba todo el rato, ni que salga negativa garantiza que baje siempre. Para hablar de crecimiento hay que ir tramo a tramo.

**Crece** en un tramo si al avanzar en  $x$  el valor sube, y **decrece** si baja. La forma más corriente de reconocer un **máximo** es un punto donde deja de subir y empieza a bajar; también puede caer en un extremo del tramo que se mire.

Los **puntos de corte**: con el eje vertical se calcula  $f(0)$ , y con el horizontal se resuelve  $f(x) = 0$ . Puede no haber ninguno con el eje horizontal, y con el vertical hay como mucho uno.

**23** Halla el dominio de  $f(x) = (2x + 1) \div (x^2 - 4)$  y el de  $g(x) = \sqrt{x - 3}$

#### Solución

El dominio son los valores de  $x$  con los que la fórmula se puede calcular.

En  $f$  hay una división, y no se puede dividir entre cero:  $x^2 - 4 = 0$  cuando  $x = 2$  y cuando  $x = -2$ .

**Dominio de  $f$ :** todos los números reales menos el 2 y el  $-2$ .

En  $g$  hay una raíz cuadrada, y dentro no puede haber un número negativo: hace falta  $x - 3 \geq 0$ , o sea  $x \geq 3$ . **Dominio de  $g$ :**  $[3, +\infty)$ , con el 3 incluido, porque  $\sqrt{0} = 0$  sí se puede calcular.

▲ Lo que se excluye en  $f$  son los valores que anulan *el denominador*, no los que anulan el numerador. En  $x = -1/2$  el numerador se anula y la función vale 0, que es un valor perfectamente calculable.

Para corregirte, sustituye:  $f(2)$  pediría dividir entre 0 y no se puede;  $g(2)$  pediría  $\sqrt{-1}$  y tampoco;  $g(3) = \sqrt{0} = 0$ , que sí existe.

**24** De una función se conocen estos cuatro puntos: **(0, 0)**, **(1, 3)**, **(2, 1)** y **(3, 6)**. Calcula su **tasa de variación media** entre  $x = 0$  y  $x = 3$ , y después entre  $x = 1$  y  $x = 2$ . ¿Se puede decir que la función crece en todo el recorrido?

#### Solución

La tasa de variación media entre dos valores de  $x$  es lo que cambia la función dividido entre lo que cambia  $x$ .

Entre 0 y 3:  $(6 - 0) \div (3 - 0) = 6 \div 3 = 2$ .

Entre 1 y 2:  $(1 - 3) \div (2 - 1) = -2 \div 1 = -2$ .

**No, no crece en todo el recorrido.** Entre  $x = 1$  y  $x = 2$  la función baja de 3 a 1, y ahí la tasa es negativa.

▲ La tasa de variación media entre dos puntos solo compara **el principio y el final**: dice a qué ritmo medio se ha pasado de uno a otro, no lo que ha ocurrido en medio. Que salga 2 y sea positiva no autoriza a decir que la función sube todo el rato, y aquí se ve con los números delante. Para hablar de crecimiento hay que mirar tramo a tramo.

25

El recibo de la luz de una casa fue de **84 €** en enero, **96 €** en febrero, **72 €** en marzo, **60 €** en abril y **66 €** en mayo. Calcula la tasa de variación media entre enero y mayo con su unidad, di si el gasto bajó todos los meses y señala el mes de mayor subida.

#### Solución

Entre enero y mayo pasan cuatro meses:  $(66 \text{ €} - 84 \text{ €}) \div 4 \text{ meses} = -18 \text{ €} \div 4 \text{ meses} = -4,5 \text{ €/mes}$ .

La unidad sale de la propia división, euros entre meses, y se lee: de media el recibo bajó 4,50 € cada mes.

Variación mes a mes: de enero a febrero **+12 €**, de febrero a marzo **-24 €**, de marzo a abril **-12 €** y de abril a mayo **+6 €**.

**No, no bajó todos los meses:** subió en febrero y volvió a subir en mayo. El mes de **mayor subida fue febrero, con 12 € más** que enero.

Para corregirte, suma las cuatro variaciones:  $12 - 24 - 12 + 6 = -18 \text{ €}$ , que es exactamente la diferencia entre mayo y enero. Si no te da eso, alguna resta está mal.

## Función lineal y función cuadrática

### Lo que hay que saber

**Recta:**  $y = mx + n$ , salvo las verticales, que no se pueden escribir así. La **pendiente**  $m$  dice cuánto sube y por cada unidad que avanza  $x$ , y la **ordenada en el origen**  $n$  es el valor en  $x = 0$ .

**Pendiente con dos puntos:**  $m = (y_2 - y_1) \div (x_2 - x_1)$ . Con  $m > 0$  la recta sube, con  $m < 0$  baja y con  $m = 0$  es horizontal.

**Recta por un punto con pendiente conocida:**  $y - y_0 = m(x - x_0)$ . Es la forma que menos cuentas pide.

**Parábola:**  $y = ax^2 + bx + c$ , con  $a$  distinto de 0. Con  $a > 0$  las ramas van hacia arriba y el vértice es el mínimo; con  $a < 0$  van hacia abajo y el vértice es el máximo.

**Vértice:**  $x = -b \div (2a)$ , y su altura se saca sustituyendo ese valor en la función. Si la parábola corta al eje horizontal en dos puntos, esa  $x$  es justo el punto medio entre ellos, y ahí tienes la comprobación.

**Cortar dos curvas** es igualar sus expresiones y resolver. La  $y$  se saca después con cualquiera de las dos, y usar la otra sirve de comprobación.

26

Halla la ecuación de la recta que pasa por **A(-2, 7)** y **B(4, -5)**, y sus puntos de corte con los dos ejes.

#### Solución

Pendiente:  $m = (-5 - 7) \div (4 - (-2)) = -12 \div 6 = -2$ .

Con el punto A:  $y - 7 = -2 \cdot (x - (-2)) = -2(x + 2) = -2x - 4$ , así que  **$y = -2x + 3$** .

**Corte con el eje vertical:** se hace  $x = 0$  y sale  $y = 3$ , el punto (0, 3).

**Corte con el eje horizontal:** se hace  $y = 0$ , o sea  $0 = -2x + 3$ , de donde  $x = 3/2$ . El punto es (3/2, 0).

Para corregirte, comprueba que los dos puntos del enunciado cumplen la ecuación: con  $x = -2$ ,  $-2(-2) + 3 = 7$  y es el valor de A; con  $x = 4$ ,  $-2 \cdot 4 + 3 = -5$  y es el de B. Si solo compruebas uno, un error en la pendiente puede pasar desapercibido.

27

De la parábola  $y = -x^2 + 4x + 5$ , halla el vértice, los cortes con los dos ejes y di si el vértice es un máximo o un mínimo.

#### Solución

El coeficiente de  $x^2$  es  $-1$ , **negativo**, así que las ramas van hacia abajo y el vértice es un **máximo**.

Abcisa del vértice:  $x = -b \div (2a) = -4 \div (2 \cdot (-1)) = 2$ . Su valor:  $y = -4 + 8 + 5 = 9$ . Vértice **(2, 9)**.

**Corte con el eje vertical:**  $x = 0$  da  $y = 5$ , el punto  $(0, 5)$ .

**Cortes con el eje horizontal:**  $-x^2 + 4x + 5 = 0$ , que multiplicando por  $-1$  queda  $x^2 - 4x - 5 = 0$ .

Discriminante  $16 + 20 = 36$ ,  $x = (4 \pm 6) \div 2$ :  **$x = 5$  y  $x = -1$** .

Comprobación, válida siempre que la parábola corte al eje horizontal en dos puntos (aquí sí): **la primera coordenada del vértice** cae justo en el medio de las de esos dos cortes, y  $(5 + (-1)) \div 2 = 2$ , que es la que se había calculado. El punto medio de los dos cortes es  $(2, 0)$  y el vértice es  $(2, 9)$ : lo que coincide es la primera coordenada, no el punto.

28

Con **40 metros** de valla se quiere cerrar una parcela **rectangular**. Si uno de los lados mide  $x$  metros, el área en metros cuadrados es  **$A(x) = x \cdot (20 - x)$** . Explica de dónde sale esa fórmula y halla las medidas que dan el área máxima.

#### Solución

El perímetro del rectángulo es  $2 \cdot (\text{largo} + \text{ancho}) = 40$  m, así que  $\text{largo} + \text{ancho} = 20$  m. Si un lado mide  $x$ , el otro mide  **$20 - x$** , y el área es el producto de los dos:  $A(x) = x(20 - x)$ . Para que el rectángulo exista,  $x$  tiene que estar entre 0 y 20.

Desarrollando,  $A(x) = -x^2 + 20x$ : es una parábola con las ramas hacia abajo, así que el vértice es el máximo.

$x = -20 \div (2 \cdot (-1)) = 10$  m, y el otro lado mide  $20 - 10 = 10$  m.

El área máxima es  $A(10) = 10 \cdot 10 = 100 \text{ m}^2$ , y la parcela resulta ser un cuadrado.

Para corregirte, prueba otras medidas con el mismo perímetro: 9 y 11 dan  $99 \text{ m}^2$ , 5 y 15 dan  $75 \text{ m}^2$ , 2 y 18 dan  $36 \text{ m}^2$ . Todas por debajo de  $100 \text{ m}^2$ .

29

Halla los puntos donde se cortan la recta  **$y = x + 3$**  y la parábola  **$y = x^2 + 1$**

#### Solución

Cortarse significa tener el mismo valor de  $y$  para el mismo  $x$ , así que se igualan las dos expresiones:  $x^2 + 1 = x + 3$ .

Se pasa todo a un lado:  $x^2 - x - 2 = 0$ . Discriminante  $1 + 8 = 9$ , y  $x = (1 \pm 3) \div 2$ :  **$x = 2$  y  $x = -1$** .

Ahora hace falta la  $y$  de cada uno, y se saca de *cualquiera* de las dos ecuaciones. Con la recta: si  $x = 2$ ,  $y = 5$ ; si  $x = -1$ ,  $y = 2$ .

**Se cortan en (2, 5) y en (-1, 2).**

Comprobación, y aquí sale gratis: se usa la *otra* ecuación. Con la parábola,  $2^2 + 1 = 5$  y  $(-1)^2 + 1 = 2$ . Los dos puntos están también en ella.

## Proporcionalidad inversa y función exponencial

### Lo que hay que saber

**Proporcionalidad inversa:**  $y = k \div x$ , con  $k$  distinto de 0. Su marca es que **el producto  $x \cdot y$  vale siempre  $k$** , y ahí tienes una comprobación inmediata de cualquier valor que calcules.

Su dominio deja fuera el **0**. Al acercarse  $x$  a cero los valores se disparan y al hacerse  $x$  muy grande se acercan a cero: son las dos **asíntotas**, una vertical y otra horizontal.

**Función exponencial:**  $y = k \cdot a^x$ , con la base  $a$  positiva y distinta de 1, y la variable **en el exponente**. ■ No confundir con  $x^2$ , donde la variable es la base:  $2^{10} = 1.024$  y  $10^2 = 100$ .

▲ Con  $k$  positivo, una exponencial **crece** si la base es mayor que 1 y **decrece** si está entre 0 y 1. Mirar la base es lo primero; con  $k$  negativo todo se da la vuelta.

**Aumentos y disminuciones repetidos:** subir un 5 % es multiplicar por 1,05 y bajar un 5 % es multiplicar por 0,95. Repetido  $t$  veces, el factor va elevado a  $t$ .

Ese factor elevado a  $t$  es lo que separa el interés compuesto del simple: en el compuesto los intereses de un periodo generan intereses en el siguiente, y por eso la cantidad crece cada vez más deprisa.

- 30** De la función  **$f(x) = 12 \div x$** : halla su dominio, calcula  $f(2)$ ,  $f(3)$ ,  $f(-4)$  y  $f(0,5)$ , y di qué ocurre con los valores de la función cuando  $x$  se acerca a 0 y cuando  $x$  se hace muy grande.

#### Solución

**Dominio:** todos los números reales menos el **0**, porque no se puede dividir entre cero.

$$f(2) = 12 \div 2 = 6 \quad f(3) = 12 \div 3 = 4 \quad f(-4) = 12 \div (-4) = -3 \quad f(0,5) = 12 \div 0,5 = 24$$

**Cuando  $x$  se acerca a 0 por el lado positivo**, el resultado se dispara:  $f(0,1) = 120$  y  $f(0,01) = 1.200$ , y se puede hacer tan grande como se quiera. **Por el lado negativo ocurre lo simétrico:**  $f(-0,1) = -120$  y  $f(-0,01) = -1.200$ , cada vez más pequeños. En  $x = 0$  la función no existe, ni por un lado ni por el otro.

**Cuando  $x$  se hace muy grande**, el resultado se acerca a 0 sin llegar nunca:  $f(100) = 0,12$  y  $f(1.000) = 0,012$ .

La comprobación propia de esta función: **el producto  $x \cdot f(x)$  siempre vale 12**.  $2 \cdot 6 = 12$ ,  $3 \cdot 4 = 12$ ,  $(-4) \cdot (-3) = 12$ ,  $0,5 \cdot 24 = 12$ . Si alguno de tus valores no cumple eso, está mal.

- 31** Se ingresan **2.000 €** en una cuenta que da un **5 % anual** de interés compuesto. Escribe la función que da el dinero al cabo de  $t$  años, calcula lo que hay a los **3 años** y compáralo con lo que se tendría si cada año se cobraran 100 € y no se reinvirtieran.

#### Solución

Cada año el capital queda multiplicado por 1,05 (el 100 % que había más el 5 % nuevo), así que  **$C(t) = 2.000 \cdot 1,05^t$** , con  $t$  en años completos (los intereses se abonan una vez al año) y  $C$  en euros.

A los tres años:  $1,05^3 = 1,157625$ , y  $2.000 \cdot 1,157625 = 2.315,25$  €.

Año a año, para verlo:  $2.000 \rightarrow 2.100 \rightarrow 2.205 \rightarrow 2.315,25$  €. El interés del segundo año son 105 €, no 100 €, porque se calcula sobre 2.100 €.

Si cada año se cobraran 100 € aparte, a los tres años habría  $2.000 + 300 = 2.300$  €. La diferencia es de **15,25 €**, y son los intereses de los intereses.

▲ El exponente es el *tiempo*, no un factor que multiplique:  $2.000 \cdot 1,05 \cdot 3 = 6.300$  € no tiene nada que ver con este problema.

32

Un cultivo de bacterias se reduce a **la mitad cada 3 horas**. Al empezar hay **6.400**. Escribe la función que da el número de bacterias al cabo de **t** horas y calcula cuántas quedan a las **12 horas**.

#### Solución

En 12 horas caben  $12 \div 3 = 4$  periodos de tres horas, y en cada uno la cantidad se queda en la mitad.  
 $6.400 \rightarrow 3.200 \rightarrow 1.600 \rightarrow 800 \rightarrow 400$  bacterias.

Con fórmula:  $N(t) = 6.400 \cdot (1/2)^{t/3}$ . Para  $t = 12$ , el exponente es  $12 \div 3 = 4$ , y  $6.400 \cdot (1/2)^4 = 6.400 \div 16 = 400$ .

▲ Esta también es una función exponencial, y **decrece**: la cantidad de delante es positiva y la base es  $1/2$ , que está entre 0 y 1. Con la cantidad de delante positiva, una exponencial crece si la base es mayor que 1 y decrece si está entre 0 y 1, así que mirar la base es lo primero.

Para corregirte, cuenta los periodos antes de calcular nada: a las 3 h una mitad, a las 6 h dos, a las 9 h tres y a las 12 h cuatro. Si tu resultado no coincide con dividir cuatro veces entre 2, algo falla: mira primero el exponente y después la división.

## Semejanza y teorema de Tales

### Lo que hay que saber

**Dos figuras son semejantes** si tienen los ángulos iguales y los lados correspondientes proporcionales. Ese cociente común es la **razón de semejanza**.

▲ En los **triángulos** basta con una de las dos cosas: con los tres lados proporcionales ya son semejantes, y con dos ángulos iguales también. **En los demás polígonos no basta**: un cuadrado y un rombo tienen los lados proporcionales y no son semejantes.

**Teorema de Tales**: varias rectas **paralelas** que cortan a dos secantes determinan sobre ellas segmentos proporcionales. Sin el paralelismo no hay teorema.

**Si la razón de semejanza es k**: las longitudes se multiplican por k, las áreas por  $k^2$  y los volúmenes por  $k^3$ .

**Escala 1:n** quiere decir que lo real es n veces lo representado. Al pasar el resultado a metros hay que recordar que  $1 \text{ m}^2$  son  $10.000 \text{ cm}^2$  y  $1 \text{ m}^3$ ,  $1.000.000 \text{ cm}^3$ .

Una forma de darse cuenta de un error de este tipo: si al doblar las medidas el área no queda multiplicada por cuatro, hay un error. El más frecuente es haberse dejado el  $k^2$ , pero también puede ser una multiplicación mal hecha: la comprobación dice que algo falla, no cuál de las dos cosas es.

33

Tres rectas **paralelas** cortan a dos rectas secantes. Sobre la primera secante determinan dos segmentos consecutivos de **6 cm** y **9 cm**. Sobre la segunda, el primero de esos segmentos mide **8 cm**. ¿Cuánto mide el segundo?

#### Solución

El teorema de Tales dice que, si las rectas que cortan son **paralelas**, los segmentos que determinan sobre una secante son proporcionales a los que determinan sobre la otra.

Se plantea la proporción con los segmentos que se corresponden:  $6 \text{ cm} \div 9 \text{ cm} = 8 \text{ cm} \div x$ .

Multiplicando en cruz:  $6 \cdot x = 9 \cdot 8 = 72$ , así que  $x = 72 \div 6 = 12 \text{ cm}$ .

Para corregirte, compara las dos razones:  $6/9$  se simplifica a  $2/3$ , y  $8/12$  también da  $2/3$ . Son la misma razón, que es lo que pedía el teorema.

▲ Sin el dato de que las tres rectas son paralelas no se puede asegurar ninguna proporción: es la condición del teorema, no un adorno del enunciado.

34

Una maqueta de un edificio está hecha a **escala 1:50**. En la maqueta, la fachada principal mide **24 cm** de alto, su superficie es de **600 cm<sup>2</sup>** y el depósito de agua tiene **8 cm<sup>3</sup>**. Calcula la altura real en metros, la superficie real en metros cuadrados y el volumen real en metros cúbicos.

#### Solución

Escala 1:50 significa que cada medida real es **50 veces** la de la maqueta.

**Altura:**  $24 \text{ cm} \cdot 50 = 1.200 \text{ cm} = \mathbf{12 \text{ m}}$ .

**Superficie:** las áreas van con la razón *al cuadrado*, o sea  $50^2 = 2.500$ . Entonces  $600 \text{ cm}^2 \cdot 2.500 = 1.500.000 \text{ cm}^2$ . Y como  $1 \text{ m}^2$  son  $10.000 \text{ cm}^2$ , eso es **150 m<sup>2</sup>**.

**Volumen:** los volúmenes van con la razón *al cubo*,  $50^3 = 125.000$ . Entonces  $8 \text{ cm}^3 \cdot 125.000 = 1.000.000 \text{ cm}^3$ . Y como  $1 \text{ m}^3$  son  $1.000.000 \text{ cm}^3$ , eso es **1 m<sup>3</sup>**.

Comprobación *de la superficie* por otro camino, sin usar la razón al cuadrado: si la fachada real midiera 12 m de alto por 12,5 m de ancho, su superficie sería  $150 \text{ m}^2$ , y en la maqueta mediría 24 cm por 25 cm, o sea  $600 \text{ cm}^2$ . Cuadra con los datos.

35

¿Son semejantes dos triángulos cuyos lados miden **6, 8 y 10 cm** y **9, 12 y 15 cm**? ¿Y un **cuadrado de 4 cm de lado** y un **rombo de 4 cm de lado** cuyos ángulos miden  $60^\circ$  y  $120^\circ$ ?

#### Solución

**Los triángulos sí son semejantes.** Se comparan los lados ordenados de menor a mayor:  $6/9 = 2/3$ ,  $8/12 = 2/3$  y  $10/15 = 2/3$ . Los tres cocientes coinciden, y en un triángulo eso basta para que sean semejantes.

Se puede ver además que los dos son rectángulos:  $6^2 + 8^2 = 36 + 64 = 100 = 10^2$ , y  $9^2 + 12^2 = 81 + 144 = 225 = 15^2$ .

**El cuadrado y el rombo no son semejantes.** Sus cuatro lados sí son proporcionales, con razón  $4/4 = 1$ , pero el cuadrado tiene los cuatro ángulos de  $90^\circ$  y el rombo los tiene de  $60^\circ$  y  $120^\circ$ . Con la misma razón de lados, uno es mucho más «chafado» que el otro.

▲ De ahí sale el límite de la regla: que los lados sean proporcionales basta **en los triángulos**, no en los demás polígonos. En un triángulo los tres lados ya obligan a que los ángulos sean los que son; en un cuadrilátero, no.

En el resto de polígonos hacen falta las dos cosas a la vez: lados proporcionales **y** ángulos iguales.

## Trigonometría del triángulo rectángulo

### Lo que hay que saber

En un triángulo rectángulo y respecto de un ángulo agudo: **seno** = cateto opuesto ÷ hipotenusa — **coseno** = cateto contiguo ÷ hipotenusa — **tangente** = cateto opuesto ÷ cateto contiguo.

Cuál es el opuesto y cuál el contiguo depende del **ángulo que se mire**: los dos ángulos agudos de un mismo triángulo se intercambian el seno y el coseno.

**Valores exactos que hay que saberse**:  $\sin 30^\circ = 1/2$ ,  $\cos 30^\circ = \sqrt{3}/2$ ,  $\sin 45^\circ = \cos 45^\circ = \sqrt{2}/2$ ,  $\sin 60^\circ = \sqrt{3}/2$ ,  $\cos 60^\circ = 1/2$ .

**Dos comprobaciones que salen gratis**:  $\sin^2 + \cos^2 = 1$  para cualquier ángulo, y  $\text{tangente} = \text{seno} \div \text{coseno}$  siempre que el coseno no sea cero (en un ángulo agudo nunca lo es).

El seno y el coseno de un ángulo agudo **están entre 0 y 1**, porque un cateto es menor que la hipotenusa. Un seno de 1,3 es un error seguro. La tangente de un ángulo agudo también es positiva, pero no tiene tope: puede ser tan grande como se quiera.

**Resolver un triángulo rectángulo** es hallar sus tres lados y sus tres ángulos. Los dos ángulos agudos suman  $90^\circ$ , y Pitágoras sirve para comprobar los lados que hayas obtenido.

- 36** En un triángulo rectángulo los catetos miden **9 cm** y **12 cm**. Calcula la hipotenusa y el seno, el coseno y la tangente del ángulo **opuesto al cateto de 9 cm**.

#### Solución

Hipotenusa por el teorema de Pitágoras:  $\sqrt{9^2 + 12^2} = \sqrt{81 + 144} = \sqrt{225} = \mathbf{15 \text{ cm}}$ .

Para ese ángulo, el cateto **opuesto** es el de 9 cm y el **contiguo** el de 12 cm.

$\text{seno} = \text{opuesto} \div \text{hipotenusa} = 9 \div 15 = \mathbf{3/5 = 0,6}$

$\text{coseno} = \text{contiguo} \div \text{hipotenusa} = 12 \div 15 = \mathbf{4/5 = 0,8}$

$\text{tangente} = \text{opuesto} \div \text{contiguo} = 9 \div 12 = \mathbf{3/4 = 0,75}$

**Dos comprobaciones que salen solas**: el seno al cuadrado más el coseno al cuadrado tiene que dar 1, y  $0,6^2 + 0,8^2 = 0,36 + 0,64 = 1$ ; y la tangente tiene que ser el seno dividido entre el coseno,  $0,6 \div 0,8 = 0,75$ .

- 37** Calcula el valor exacto, sin calculadora, de  **$\sin 60^\circ \cdot \cos 30^\circ - \sin 30^\circ \cdot \cos 60^\circ$**

#### Solución

Los valores exactos de esos ángulos conviene tenerlos a mano:  $\sin 30^\circ = 1/2$ ,  $\cos 30^\circ = \sqrt{3}/2$ ,  $\sin 60^\circ = \sqrt{3}/2$  y  $\cos 60^\circ = 1/2$ .

Primer producto:  $\sin 60^\circ \cdot \cos 30^\circ = (\sqrt{3}/2) \cdot (\sqrt{3}/2) = 3/4$ , porque  $\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 3$ .

Segundo producto:  $\sin 30^\circ \cdot \cos 60^\circ = (1/2) \cdot (1/2) = 1/4$ .

Resta:  $3/4 - 1/4 = \mathbf{1/2}$ .

Para corregirte, calcula el mismo resultado con decimales aproximados:  $\sqrt{3} \approx 1,732$ , así que  $\sqrt{3}/2 \approx 0,866$ . Entonces  $0,866 \cdot 0,866 \approx 0,75$  y  $0,5 \cdot 0,5 = 0,25$ , y  $0,75 - 0,25 = 0,5$ . Coincide con  $1/2$ .

▲ El  $30^\circ$  y el  $60^\circ$  se intercambian el seno y el coseno porque son los dos ángulos agudos del mismo triángulo rectángulo: lo que para uno es el cateto opuesto, para el otro es el contiguo.

38

Una escalera de **5 m** se apoya en una pared vertical y forma un ángulo de **60°** con el suelo, que es horizontal. ¿A qué altura de la pared llega el extremo de arriba? ¿A qué distancia de la pared está el pie de la escalera?

#### Solución

La escalera, la pared y el suelo forman un triángulo rectángulo: la escalera es la hipotenusa (5 m), la altura es el cateto **opuesto** al ángulo de 60° y la distancia al pie es el cateto **contiguo**.

$$\text{Altura} = 5 \text{ m} \cdot \sin 60^\circ = 5 \cdot (\sqrt{3}/2) = 5\sqrt{3}/2 \approx \mathbf{4,33 \text{ m}}.$$

$$\text{Distancia} = 5 \text{ m} \cdot \cos 60^\circ = 5 \cdot (1/2) = \mathbf{2,5 \text{ m}}.$$

Comprobación con Pitágoras sobre lo que acabas de obtener:  $2,5^2 + (5\sqrt{3}/2)^2 = 6,25 + 18,75 = 25$ , que es  $5^2$ .

▲ Pitágoras caza un valor mal calculado, pero **no caza que hayas cambiado el seno por el coseno**: intercambiando los dos valores —2,5 m de altura y  $5\sqrt{3}/2$  m de distancia— vuelve a salir exactamente 25. Lo que sí lo caza es el tamaño: el lado que está enfrente del ángulo mayor tiene que ser el más largo, y aquí el ángulo de 60° es el mayor de los dos agudos.

Y el tamaño cuadra por otro lado: en un triángulo rectángulo los dos catetos son menores que la hipotenusa, así que ninguno de los dos podía pasar de 5 m.

39

Desde un punto del suelo situado a **40 m** del pie de una torre, la parte más alta de la torre se ve con un ángulo de elevación de **30°**. Calcula la altura de la torre y la distancia desde ese punto hasta lo alto de la torre.

#### Solución

El suelo, la torre y la visual forman un triángulo rectángulo. Los 40 m son el cateto **contiguo** al ángulo de 30° y la altura es el cateto **opuesto**.

Con contiguo y opuesto la razón que toca es la **tangente**:  $\text{tg } 30^\circ = \text{altura} \div 40 \text{ m}$ .

$$\text{tg } 30^\circ = \sin 30^\circ \div \cos 30^\circ = (1/2) \div (\sqrt{3}/2) = 1/\sqrt{3} = \sqrt{3}/3 \approx 0,5774.$$

$$\text{Altura} = 40 \text{ m} \cdot (\sqrt{3}/3) = 40\sqrt{3}/3 \approx \mathbf{23,09 \text{ m}}.$$

La distancia hasta lo alto es la hipotenusa:  $40 \text{ m} \div \cos 30^\circ = 40 \div (\sqrt{3}/2) = 80/\sqrt{3} = 80\sqrt{3}/3 \approx \mathbf{46,19 \text{ m}}$ .

Comprobación: la hipotenusa tiene que ser mayor que los dos catetos, y 46,19 m pasa de 40 m y de 23,09 m. Y con los valores exactos, sin redondear, Pitágoras cuadra al céntimo:  $40^2 + (40\sqrt{3}/3)^2 = 1.600 + 1.600/3 = 6.400/3$ , que es justamente  $(80\sqrt{3}/3)^2$ .

▲ Con los valores ya redondeados no sale igual de limpio:  $23,09^2 = 533,1481$  y  $46,19^2 = 2.133,5161$ , y  $1.600 + 533,1481$  son 2.133,1481. La diferencia es el redondeo, no un error, pero por eso las comprobaciones conviene hacerlas con los valores exactos.

## Geometría analítica en el plano

### Lo que hay que saber

**Vector de A a B** =  $(x_B - x_A, y_B - y_A)$ . El orden importa: el de B a A es el mismo con los signos cambiados.

**Distancia entre dos puntos** =  $\sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$ . Es Pitágoras aplicado a las dos diferencias.

**Punto medio** = la media de cada coordenada por separado.

**Ecuación general**  $Ax + By + C = 0$ , con A y B no nulos a la vez. Para leer la pendiente lo cómodo es despejar y y dejarla como  $y = mx + n$ .

**Paralelas**: misma pendiente. **Perpendiculares**: el producto de las pendientes vale  $-1$ , o sea que una es la inversa de la otra cambiada de signo.

▲ Esa regla del producto  $-1$  pide que **las dos rectas tengan pendiente**. Una recta vertical como  $x = 3$  no la tiene, y sin embargo es perpendicular a  $y = 2$ : ahí hay que verlo directamente, no con la fórmula.

40

Dados **A(-1, 2)** y **B(5, 10)**, calcula la distancia entre los dos, las coordenadas del punto medio del segmento AB y las coordenadas del vector que va de A a B.

### Solución

Las diferencias de coordenadas son  $5 - (-1) = 6$  y  $10 - 2 = 8$ .

**Vector de A a B**: justamente esas dos diferencias, **(6, 8)**.

**Distancia**:  $\sqrt{6^2 + 8^2} = \sqrt{36 + 64} = \sqrt{100} = 10$ . Es Pitágoras sobre el triángulo que forman las dos diferencias.

**Punto medio**: se hace la media de cada coordenada. En la primera,  $(-1 + 5) \div 2 = 2$ ; en la segunda,  $(2 + 10) \div 2 = 6$ . Sale **M(2, 6)**.

Para corregirte, mide las **dos** mitades: de A a M las diferencias son 3 y 4, y  $\sqrt{9 + 16} = 5$ ; de M a B son también 3 y 4, y vuelve a salir 5. Que las dos valgan 5 y sumen los 10 que hay de A a B solo lo cumple el punto medio.

▲ Con una sola de las dos distancias no basta: cualquier punto que esté a 5 unidades de A la pasaría sin ser el del medio.

41

De la recta **r:  $2x - 3y + 6 = 0$** , halla la pendiente y los cortes con los ejes. Después escribe la ecuación de la recta **paralela** a r que pasa por P(3, 1) y la de la **perpendicular** a r por ese mismo punto.

### Solución

Se despeja y para ver la pendiente:  $3y = 2x + 6$ , o sea  $y = (2/3)x + 2$ . La pendiente es **2/3**.

**Cortes**: con  $x = 0$  sale  $y = 2$ , punto (0, 2); con  $y = 0$  sale  $2x + 6 = 0$ , o sea  $x = -3$ , punto (-3, 0).

**Paralela por P**: misma pendiente 2/3.  $y - 1 = (2/3)(x - 3)$ , y quitando denominadores,  $3y - 3 = 2x - 6$ , es decir  **$2x - 3y - 3 = 0$** .

**Perpendicular por P**: la pendiente es la inversa cambiada de signo, **-3/2**.  $y - 1 = (-3/2)(x - 3)$  da  $2y - 2 = -3x + 9$ , es decir  **$3x + 2y - 11 = 0$** .

Comprobación, y son dos: el punto P(3, 1) tiene que cumplir las dos ecuaciones ( $2 \cdot 3 - 3 \cdot 1 - 3 = 0$  y  $3 \cdot 3 + 2 \cdot 1 - 11 = 0$ ), y el producto de las dos pendientes tiene que dar  $-1$ :  $(2/3) \cdot (-3/2) = -1$ .

Comprueba que el triángulo de vértices **A(1, 1)**, **B(5, 1)** y **C(1, 4)** es rectángulo. Halla después cuánto mide su contorno y cuánta superficie encierra.

### Solución

Longitudes de los tres lados, con la fórmula de la distancia:  $AB = \sqrt{(4^2 + 0^2)} = 4$ ,  $AC = \sqrt{(0^2 + 3^2)} = 3$  y  $BC = \sqrt{((-4)^2 + 3^2)} = \sqrt{25} = 5$ .

Se prueba Pitágoras con el lado mayor:  $4^2 + 3^2 = 16 + 9 = 25 = 5^2$ . Se cumple, así que el triángulo **es rectángulo**, y el ángulo recto está en **A**, que es el vértice común a los dos lados menores.

**Perímetro** =  $4 + 3 + 5 = 12$  unidades.

**Área** =  $(4 \cdot 3) \div 2 = 6$  unidades cuadradas. Los dos catetos hacen de base y de altura porque son perpendiculares entre sí.

▲ En un triángulo cualquiera no se puede multiplicar dos lados y dividir entre dos: eso solo vale aquí porque hay un ángulo recto y entonces un cateto es la altura sobre el otro.

## Estadística de una y de dos variables

### Lo que hay que saber

**Media** = suma de los datos ÷ cuántos son. **Mediana** = el valor central una vez ordenados; si la cantidad de datos es par, se promedian los dos del centro. **Moda** = el que más se repite, y puede haber varias.

**Varianza** = media de los cuadrados de las diferencias con la media. **Desviación típica** = su raíz cuadrada, y va en las mismas unidades que los datos.

▲ Dos grupos pueden tener **la misma media** y ser muy distintos: la media sola no describe un grupo. La desviación típica dice cuánto se apartan los datos de ella.

**Coefficiente de variación** = desviación típica ÷ media, y pide una media distinta de cero. Al no tener unidades, permite comparar la dispersión de grupos con medias muy distintas; pero no vale en escalas cuyo cero es un convenio, como los grados centígrados, porque al cambiar de escala cambia el resultado.

**Dos variables:** la **covarianza** es la media de los productos de las diferencias con cada media. Positiva, las dos variables **tienden** a subir juntas; negativa, cuando una sube la otra tiende a bajar; y es una tendencia del conjunto, no algo que cumpla cada dato. La **recta de regresión** de y sobre x tiene pendiente covarianza ÷ varianza de x —y hace falta que esa varianza no sea cero— y pasa por el punto de las dos medias.

▲ Dos cosas que la recta de regresión **no** dice: que una variable sea la causa de la otra, y qué ocurre fuera del tramo de datos con el que se ha ajustado. Predecir muy lejos de ahí puede dar valores imposibles.

Las horas de estudio semanales de diez alumnos del grupo A son **4, 6, 6, 8, 8, 8, 10, 10, 10 y 10**. Las de otros diez del grupo B son **7, 7, 7, 7, 7, 9, 9, 9, 9 y 9**. Calcula la media, la mediana, la moda y la desviación típica del grupo A, y la media y la desviación típica del B. Di qué grupo es más homogéneo.

### Solución

**Grupo A.** Suma =  $4 + 6 + 6 + 8 + 8 + 8 + 10 + 10 + 10 + 10 = 80$ , y media =  $80 \div 10 = 8$  horas.

Con los datos ordenados y diez valores, la mediana es la media de los dos centrales, el quinto y el sexto, que valen 8 y 8: **mediana = 8 horas**. La moda es el valor que más se repite, el **10**, que sale cuatro veces.

Desviación típica de A: se suman los cuadrados de las diferencias con la media.  $(-4)^2 + (-2)^2 + (-2)^2 + 0 + 0 + 0 + 2^2 + 2^2 + 2^2 + 2^2 = 16 + 4 + 4 + 16 = 40$ . Se divide entre 10 y sale una varianza de 4, así que la desviación típica es  $\sqrt{4} = 2$  horas.

**Grupo B.** Suma =  $7 \cdot 5 + 9 \cdot 5 = 35 + 45 = 80$ , media = **8 horas**, la misma. Las diferencias con la media son cinco de  $-1$  y cinco de  $+1$ , así que la suma de sus cuadrados es 10, la varianza 1 y la

desviación típica **1 hora**.

**El grupo B es más homogéneo:** con la misma media, sus datos se apartan la mitad. Y eso es lo que mide el coeficiente de variación, desviación entre media: en A vale  $2 \div 8 = 0,25$ , un **25 %**, y en B  $1 \div 8 = 0,125$ , un **12,5 %**.

44

De cinco alumnos se han apuntado las horas dedicadas a preparar un examen y la nota obtenida: **1 hora y un 3, 2 horas y un 4, 3 horas y un 5, 4 horas y un 8 y 5 horas y un 10**. Calcula las dos medias, la covarianza y la recta de regresión de la nota sobre las horas, y úsala para estimar la nota de quien estudie 6 horas.

#### Solución

Media de las horas:  $(1 + 2 + 3 + 4 + 5) \div 5 = \mathbf{3 \text{ horas}}$ . Media de las notas:  $(3 + 4 + 5 + 8 + 10) \div 5 = 30 \div 5 = \mathbf{6}$ .

Las diferencias con su media son, en horas, -2, -1, 0, 1 y 2; y en notas, -3, -2, -1, 2 y 4.

**Covarianza** = media de los productos de esas diferencias =  $[(-2)(-3) + (-1)(-2) + 0 \cdot (-1) + 1 \cdot 2 + 2 \cdot 4] \div 5 = (6 + 2 + 0 + 2 + 8) \div 5 = 18 \div 5 = \mathbf{3,6}$ .

La varianza de las horas es  $(4 + 1 + 0 + 1 + 4) \div 5 = \mathbf{2}$ , así que la pendiente de la recta es  $3,6 \div 2 = \mathbf{1,8}$ , y la ordenada en el origen,  $6 - 1,8 \cdot 3 = \mathbf{0,6}$ . La recta es **nota =  $1,8 \cdot \text{horas} + 0,6$** .

Para 6 horas daría  $1,8 \cdot 6 + 0,6 = \mathbf{11,4}$ , que **no es una nota posible**: el máximo es 10. La recta se ha ajustado con datos de 1 a 5 horas y fuera de ese tramo deja de ser fiable.

Para corregirte, mira lo que la recta predice en cada dato y réstalo de la nota real: 2,4 frente a 3, 4,2 frente a 4, 6 frente a 5, 7,8 frente a 8 y 9,6 frente a 10. Las cinco diferencias son 0,6, -0,2, -1, 0,2 y 0,4, y tienen que sumar cero:  $0,6 - 0,2 - 1 + 0,2 + 0,4 = 0$ .

▲ Y la covarianza positiva dice que las dos variables **tienden** a subir juntas —es una tendencia del conjunto, no una regla que cumpla cada dato—, no que una sea *la causa* de la otra. Aquí es razonable pensar que estudiar ayuda, pero eso lo dice el sentido común del problema, no el cálculo.

45

En un grupo de **40 alumnos** hay **22 chicas**. Practican algún deporte **24 personas**, y de ellas **15 son chicas**. Organiza los datos cruzando las dos características y calcula cuántos chicos no practican ningún deporte y qué porcentaje del grupo representan.

#### Solución

Conviene ir rellenando lo que falta a partir de los totales.

**Chicos:**  $40 - 22 = \mathbf{18}$ .

**Chicos que practican deporte:** de los 24 que practican, 15 son chicas, así que  $24 - 15 = \mathbf{9}$  son chicos.

**Chicos que no practican:**  $18 - 9 = \mathbf{9}$ . Y chicas que no practican:  $22 - 15 = 7$ .

**Porcentaje:**  $9 \div 40 = 0,225$ , o sea el **22,5 %** del grupo.

Para corregirte, suma los cuatro grupos, que tienen que dar el total: 15 chicas con deporte + 9 chicos con deporte + 7 chicas sin deporte + 9 chicos sin deporte = 40. Y los que no practican son  $7 + 9 = 16$ , que es  $40 - 24$ .

## Probabilidad compuesta y condicionada

### Lo que hay que saber

**Regla de Laplace** (solo si todos los resultados son igual de posibles): probabilidad = resultados que sirven ÷ resultados posibles. Sale entre 0 y 1.

**$P(A \text{ o } B) = P(A) + P(B) - P(A \text{ y } B)$** . Si los sucesos no pueden darse a la vez, ese último término es 0 y basta con sumar.

**$P(A \text{ y } B) = P(A) \cdot P(B \text{ sabiendo } A)$** , y para poder condicionar hace falta que  $P(A)$  no sea 0. El segundo factor es la **probabilidad condicionada**, y hay que preguntarse siempre si el primer suceso cambia el segundo.

▲  **$P(A) \cdot P(B)$**  solo vale cuando los sucesos son **independientes**. Sacar dos bolas **con devolución** lo es; **sin devolución** no lo es, mientras en la urna haya bolas de los dos colores (si todas fueran iguales, la primera extracción no diría nada nuevo sobre la segunda).

▲ **Incompatibles no es independientes**, casi al contrario: si dos sucesos de probabilidad no nula no pueden ocurrir juntos, saber que ha salido uno descarta el otro, y eso es depender mucho.

**Cuando hay dos etapas** (elegir máquina y luego mirar si falla), conviene montar las ramas en un **diagrama de árbol**: se multiplica a lo largo de cada rama y se suman las ramas que interesan. Y para ir al revés —saber la causa conociendo el efecto— se divide la rama buscada entre la suma de todas las que producen ese efecto.

46

Una urna tiene **4 bolas verdes** y **6 negras**, idénticas al tacto y distintas solo en el color. Se extraen dos bolas **sin devolver** la primera. Calcula la probabilidad de que las dos sean verdes y la de que la segunda sea verde sabiendo que la primera lo fue. Repite el primer cálculo suponiendo que la primera bola **sí** se devuelve.

### Solución

En total hay 10 bolas. La probabilidad de que la primera sea verde es  $4 \div 10 = \mathbf{2/5}$ .

Si la primera fue verde y no se devuelve, quedan 9 bolas y solo 3 verdes. Por tanto la probabilidad de que la segunda sea verde **sabiendo que la primera lo fue** es  $3 \div 9 = \mathbf{1/3}$ .

Para que ocurran las dos cosas se multiplican esas dos probabilidades, la segunda ya condicionada por la primera:  $(2/5) \cdot (1/3) = \mathbf{2/15}$ , algo más del 13 %.

**Con devolución** la urna vuelve a tener 4 verdes de 10 bolas, así que la segunda extracción no se entera de la primera:  $(2/5) \cdot (2/5) = \mathbf{4/25}$ , un 16 %.

▲ Ahí está la diferencia que importa: multiplicar directamente las dos probabilidades de partida,  $(2/5) \cdot (2/5)$ , solo vale en el caso con devolución. Aplicado al caso sin devolución daría  $4/25$  en lugar de  $2/15$ , y el error no se nota si no se piensa en si las extracciones se influyen o no.

47

Se lanza un dado corriente de seis caras. Sea **A** = «sale un número par» y **B** = «sale un 3». ¿Son **incompatibles**? ¿Son **independientes**? Calcula también la probabilidad de que salga par o un 3.

### Solución

$P(A) = 3 \div 6 = \mathbf{1/2}$ , porque los pares son 2, 4 y 6.  $P(B) = \mathbf{1/6}$ .

**Incompatibles: sí.** El 3 no es par, así que no hay ningún resultado que cumpla las dos cosas a la vez. La probabilidad de que ocurran las dos es **0**.

**Independientes: no.** Serían independientes si la probabilidad de que ocurran las dos fuera el producto  $P(A) \cdot P(B) = (1/2) \cdot (1/6) = 1/12$ . Pero vale 0, y 0 no es  $1/12$ .

Se entiende bien pensándolo al revés: si te dicen que ha salido par, la probabilidad de que sea un 3 pasa a ser cero. Saber lo uno cambia lo otro, y eso es justamente *no* ser independientes.

**P(par o 3)** =  $1/2 + 1/6 = 3/6 + 1/6 = 4/6 = 2/3$ . Aquí se pueden sumar sin restar nada porque no hay resultados repetidos entre los dos sucesos.

▲ «Incompatibles» e «independientes» suenan parecido y son casi lo contrario: si dos sucesos de probabilidad no nula no pueden darse juntos, saber que ha ocurrido uno descarta el otro.

---

48

En una fábrica, la máquina **A** produce el **60 %** de las piezas y la **B** el **40 %**. Sale defectuosa el **2 %** de las de A y el **5 %** de las de B. Se coge una pieza al azar: ¿qué probabilidad hay de que sea defectuosa? Y si resulta ser defectuosa, ¿qué probabilidad hay de que la haya hecho B?

#### Solución

Hay dos caminos que llevan a una pieza defectuosa, y cada uno es una probabilidad multiplicada por otra.

Por A:  $0,60 \cdot 0,02 = 0,012$ . Por B:  $0,40 \cdot 0,05 = 0,020$ .

**Probabilidad de que sea defectuosa** =  $0,012 + 0,020 = 0,032$ , es decir el **3,2 %**.

Para la segunda pregunta ya se sabe que es defectuosa, así que el total deja de ser todas las piezas y pasa a ser solo ese 3,2 %. De esa parte, la que viene de B es 0,020.

**P(la ha hecho B, sabiendo que es defectuosa)** =  $0,020 \div 0,032 = 5/8 = 0,625$ , el **62,5 %**.

▲ Fíjate en el resultado: B fabrica menos piezas que A y, aun así, la mayor parte de las defectuosas son suyas. Lo que decide no es cuánto produce cada máquina, sino el producto de cuánto produce por lo mal que lo hace, y por eso hay que calcularlo en vez de responder de memoria que la culpable es la que más fabrica.

---